Fonds de recherche
Société et culture
Québec

Rapport de recherche

PROGRAMME ACTIONS CONCERTÉES

La réussite en mathématiques au secondaire commence à la maternelle: Synthèse des connaissances sur les pratiques d'enseignement des mathématiques efficaces à la maternelle et au primaire pour réussir l'algèbre du secondaire?

Chercheure principale
Elena Arkhipova, Université du Québec en Outaouais

Cochercheurs
Annie Savard, Université McGill
Nathalie Silvia Anwandter Cuellar, Université du Québec en Outaouais

Collaborateurs
Claudine Gervais, Commission scolaire des Grandes-Seigneuries
Marie-Sophie Gélinas, Commission scolaire de la Vallée-des-Tisserands
Valériane Passaro, Université de Montréal
Ildiko Pelczer, Université Concordia
Vanessa St-Jacques, étudiante à la maitrise, UQO
Marie-Christine Gauthier, étudiante à la maitrise, UQO
Alexandre Cavalcante, étudiant au doctorat, McGill
Azadeh Javaherpour, étudiante au doctorat, McGill
Ali Motlagh, étudiant au doctorat, McGill
Amélie Poulin, étudiante au baccalauréat, McGill
Steve Tremblay, étudiant au doctorat, UQAM

Établissement gestionnaire de la subvention
Université du Québec en Outaouais

Numéro du projet de recherche (synthèse des connaissances)
2019-0PZS-264486

Titre de l'Action concertée
Programme de recherche sur la persévérance et la réussite scolaires

Partenaires de l'Action concertée
Le Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur (MEES)
et le Fonds de recherche du Québec – Société et culture (FRQSC)

RAPPORT SCIENTIFIQUE INTÉGRAL

PARTIE A – CONTEXTE DE LA RECHERCHE

1. Problématique

La réussite éducative et sociale des jeunes est considérée comme une priorité économique et politique au Québec. Le décrochage scolaire nuit directement à la prospérité de notre société. À cet effet, les données statistiques sur le décrochage scolaire indiquent que plus de la moitié des élèves décrocheurs sont ceux qui ne réussissent pas leur apprentissage. Dans l'apprentissage des mathématiques, l'algèbre représente un enjeu fondamental pour la réussite éducative des élèves. Ce sujet est reconnu par les éducateurs et les décideurs politiques comme la porte d'entrée aux mathématiques supérieures et aux possibilités d'emploi dans l'avenir. Pourtant, c'est le sujet qui pose le plus de difficulté aux élèves. Le problème a été bien décrit par des chercheurs (ex. Kieran, 1989; Bednarz et Janvier, 1993). Les difficultés liées à l'apprentissage de l'algèbre s'expliqueraient en grande partie par une rupture entre les apprentissages du primaire et du secondaire. Afin de faciliter la transition à l'algèbre du secondaire, plusieurs recherches proposent d'intervenir au préscolaire et au primaire pour permettre aux élèves de développer graduellement ce qu'on appelle « la pensée algébrique » (Radford, 2010; Squalli, 2017). Il ne s'agit pas de déplacer les notions d'algèbre dans le curriculum du primaire, mais plutôt de proposer des pratiques d'enseignement des mathématiques qui permettent aux jeunes élèves de développer la pensée mathématique qui éventuellement supportera l'apprentissage de l'algèbre au secondaire.

2. Principales questions de recherche

Quelles sont, au Québec et ailleurs dans le monde, les pratiques reconnues comme efficaces de l'enseignement des mathématiques à la maternelle et au primaire pouvant prévenir les difficultés en mathématiques (algèbre) au secondaire?

1. Comment les chercheurs expliquent la genèse de la pensée algébrique chez les jeunes élèves? Quels sont les racines de la pensée algébrique?
2. Parmi les ouvrages scientifiques consultés, quels sont ceux qui décrivent des activités ou des approches didactiques en lien avec le but de développement du raisonnement algébrique ou la pensée algébrique ou leur genèse chez les jeunes enfants? Quelles sont les caractéristiques de ces activités?
3. Que peut-on retirer de l'analyse qualitative de ces activités et des approches dans le plan pratique? Quelles suggestions aux praticiennes du milieu, aux cadres supérieurs, aux chercheurs?

3. Objectifs poursuivis

L'objectif principal de ce projet est d'étudier la possibilité du développement de la pensée algébrique chez les jeunes enfants selon la recherche scientifique contemporaine pour répondre au problème de rupture arithmétique-algèbre. Nous avions aussi comme objectif de documenter, à l'aide de l'étude des résultats de recherches existantes, les pratiques enseignantes reportées comme efficaces au préscolaire et au primaire du point de vue de leur potentiel à développer une pensée mathématique chez les élèves afin de diminuer les ruptures avec l'algèbre du secondaire. Nous avons posé un regard didactique et développemental sur l'ensemble des connaissances scientifiques disponibles pour identifier les points forts et les lacunes des connaissances sur le développement graduel et assuré de la pensée mathématique chez les jeunes élèves. Nous visions aussi à dégager des pistes d'action tels que : modifications au programme, développement de documents explicatifs-didactiques-pédagogiques destiné aux professionnels du milieu scolaire, changement ou ajustement des pratiques existantes.

PARTIE B – PISTES DE SOLUTION EN LIEN AVEC LES RÉSULTATS, RETOMBÉES ET IMPLICATIONS DE VOS TRAVAUX

Les résultats de la recherche présentés dans cette partie s'adressent principalement aux responsables du développement des programmes de formation de l'école québécoise (mathématique, volet primaire et préscolaire). Ils peuvent représenter un intérêt important aux spécialistes d'enseignement, tels que les conseillers pédagogiques, les orthopédagogues, les enseignants, les développeurs de manuels scolaires en mathématique etc.

Les conclusions de notre recherche suggèrent que pour assurer la réussite scolaire des élèves au secondaire, des modifications importantes sont requises à l'enseignement des mathématiques au primaire et à la maternelle. Bien que nos recommandations, décrites plus bas (voir aussi l'Annexe I), respectent le sens du *Programme de formation de l'école Québécoise* (MEES, 2001, 2009), les déclarations du *Programme* semblent insuffisantes pour assurer leur interprétation appropriée et pour clarifier les pistes du développement de la pensée algébrique chez les jeunes élèves. De plus, les chercheurs partout dans le monde soulignent l'importance de former les futurs enseignants et les enseignants du préscolaire et du primaire en service pour les armer d'une vision plus large et profonde sur les mathématiques qu'ils enseignent et pour leur permettre de s'approprier des outils didactique nouveaux. Une révision des manuels scolaires est aussi à envisager.

Bien que notre recherche bibliographique n'inclût pas toute l'information disponible, et est donc évidemment limitée, elle représente un échantillon des textes assez large (126 articles) et varié pour permettre une généralisation et une synthèse intéressante et informative. Répondant à nos questions de recherche et en poursuite de nos objectifs, nous présentons ici les résultats les plus significatifs de notre projet.

Les chercheurs approchent la problématique de la rupture arithmétique-algèbre de trois façons.

- *Algèbre comme arithmétique généralisée* est une approche qui stipule que la pensée algébrique doit s'appuyer sur une connaissance arithmétique et l'expérience numérique de l'élève. Donc, il faut que l'élève d'abord forme une connaissance numérique et arithmétique et ensuite la généralise pour former des notions algébriques.
- *Ligne d'algèbre dans le curriculum du primaire* est une approche stipulant que certaines notions et contextes importants à l'algèbre ne sont pas traités en arithmétique. Donc, il faut ajouter des activités spécifiques au curriculum du primaire.
- *Pensée algébrique est à la base de l'arithmétique et de l'algèbre* est une approche qui stipule que les idées mathématiques les plus générales et fondamentales sont à la base de l'apprentissage de l'arithmétique et de l'algèbre. Donc, il faut viser premièrement le développement de ces idées fondamentales au primaire et au préscolaire.

Cette troisième approche (Pasnak et al., 2006; Davydov, 2008) semble être la plus prometteuse et la plus proche de la philosophie véhiculée par le *Programme de formation de l'école québécoise*. Cette approche met en avant l'enseignement des lois générales et fondamentales du monde mathématique (ex. conservation du nombre, commutativité etc.) plutôt que l'enseignement des notions spécifiquement algébriques. Cette approche, selon les auteurs, favorise spécifiquement le développement de la pensée mathématique chez les élèves identifiés comme « ayant de difficultés en mathématiques ou à risque de les avoir » (ex. Warren, 2016).

La synthèse des textes analysés nous amène à identifier neuf recommandations pratiques (pistes à explorer) pour le développement de la pensée algébrique de façon graduelle et assurée dès le préscolaire (voire l'Annexe I pour les explications détaillées).

1. Mettre en place une formation solide spécifique pour les futurs enseignants et les enseignants du préscolaire et du primaire en poste.
2. Prioriser l'enseignement d'un regard relationnel sur l'arithmétique, pour assurer l'accès des élèves aux idées et les principes mathématiques fondamentaux.
3. Introduire les lettres comme représentant des quantités dès le début de l'apprentissage, pour permettre une meilleure communication, et ainsi la généralisation et l'acquisition, des idées et des principes fondamentaux en mathématiques.
4. Promouvoir l'étude des problèmes mathématiques complexes, pour assurer le développement du raisonnement mathématique profond et flexible.
5. Exposer les élèves à des situations dans lesquelles des quantités co-varient pour préparer le développement des notions de fonction et de variable requises à l'algèbre.
6. Travailler davantage et de façon plus explicite la composante modélisation de la compétence à résoudre des problèmes pour renforcer l'élément généralisation dans chaque activité mathématique.
7. Favoriser l'apprentissage de méthodes de représentation permettant la modélisation, et ainsi la généralisation, pour armer les élèves avec des outils critiques de pensée mathématique.
8. Favoriser la discussion mathématique et la culture mathématique en classe, pour contribuer au développement de l'enfant comme dans le plan cognitive et social.
9. Varier l'enseignement selon la nature du contenu enseigné.

Pour faciliter le travail qui s’envient nous avons exemplifié des activités d’apprentissage, issus des écrits scientifiques consultés, qui peuvent être utilisées en classe du primaire et à la maternelle par les professionnels. Le Guide explicatif fourni avec ce rapport (Annexe IV) contient l’orientation importante quant à l’utilisation des activités sélectionnées et aux modifications d’ordre général à apporter à l’enseignement des mathématiques en classe du préscolaire et du primaire pour assurer la continuité du développement de la pensée algébrique chez les élèves.

Notre étude suggère que pour résoudre le problème de transition arithmétique-algèbre, la vision sur l’arithmétique et son enseignement doit être changée en faveur de l’enseignement de l’arithmétique par une voie plus algébrique. Il ne s’agit pas de l’enseignement de l’algèbre à la place de l’arithmétique, mais du **changement du caractère de l’enseignement** de l’arithmétique. Cette nouvelle vision soit caractérisée par la valorisation des idées fondamentales et générales des mathématiques faisant partie de l’arithmétique, par un meilleur équilibre entre l’enseignement des opérations arithmétique d’un côté et des structures et des relations mathématiques de l’autre côté, par le rôle important attribué à l’activité de la modélisation, par la place accrue donnée à la discussion mathématique dans les classes.

Les écrits scientifiques consultés suggèrent que « l’algébrisation » de l’enseignement de l’arithmétique n’est pas un obstacle aux élèves mais plutôt un défi aux didacticiens et aux professionnels de l’enseignement. De nombreuses recherches démontrent que la voie algébrique est accessible et profitable pour des jeunes élèves dans des classes ordinaires et en adaptation scolaire (ex. Lee, 2006; Hughes, 2014). Toutefois, les chercheurs soulignent (et ce, dans plusieurs pays) que les enseignants ont besoin d’une solide formation pour être à l’aise avec cette nouvelle voie (ex. Malara et Navarra, 2018).

Nous avons examiné le *Programme de formation de l'école québécoise*, volet mathématique au primaire pour identifier les éléments qui potentiellement soutiennent la vision nouvelle formulée plus haut. Globalement, le sens du programme ne contredit pas à cette vision. Toutefois, le programme permet plusieurs interprétations et n'est pas trop précis quant à l'implantation de l'enseignement en classe. Par exemple, l'utilisation du langage mathématique est suggérée, mais il n'y a pas de précision sur l'utilisation des lettres comme identifiant des quantités connues et inconnues pour, par exemple, modéliser les relations entre ses quantités. Certains autres aspects du programme pourront être améliorés.

Notre étude propose des pistes fort intéressantes quant aux changements à entreprendre à l'école pour résoudre le problème de rupture arithmétique-algèbre. Toutefois, nous n'avons pas trouvé dans les écrits scientifiques consultés une preuve expérimentale qu'une ou l'autre approche définitivement élimine ce problème. Il n'y a pas non plus d'indication quant aux différences (possibles) entre les filles et les garçons dans leur développement de la pensée algébrique. Avant de s'engager dans les changements dans l'enseignement des mathématiques, il faut expérimenter les stratégies proposées comme une approche intégrale. Les activités exemplifiées dans le Guide (Annexe IV), bien que riches, ne couvrent pas tous les besoins qu'on peut envisager pour assurer un développement de la pensée algébrique requise. Le Guide développé ne remplace pas les besoins de formation professionnelle des enseignants désirant implanter les activités. Finalement, plusieurs aspects importants de la pensée algébrique à développer peuvent ne pas être représentés dans des manuels scolaires d'aujourd'hui. Il est possible que des nouveaux outils didactiques soient à développer.

Voici ce qu'on peut faire :

Programme Actions concertées

1. Organiser la recherche expérimentale longitudinale pour approuver (ou désapprouver) les recommandations formulées plus haut et aussi pour développer des activités d'apprentissage et des guides plus détaillés.
2. Proposer aux enseignants enthousiastes de se former et d'implanter certaines activités du répertoire sélectionné pour se familiariser à une vision nouvelle de l'arithmétique à travers des lunettes de l'algèbre. Grâce à ce mouvement, cette vision va commencer à gagner du terrain et sera partagée graduellement dans des écoles.
3. Promouvoir la vision nouvelle auprès du corps professoral et des formateurs des futurs enseignants.

PARTIE C – MÉTHODOLOGIE

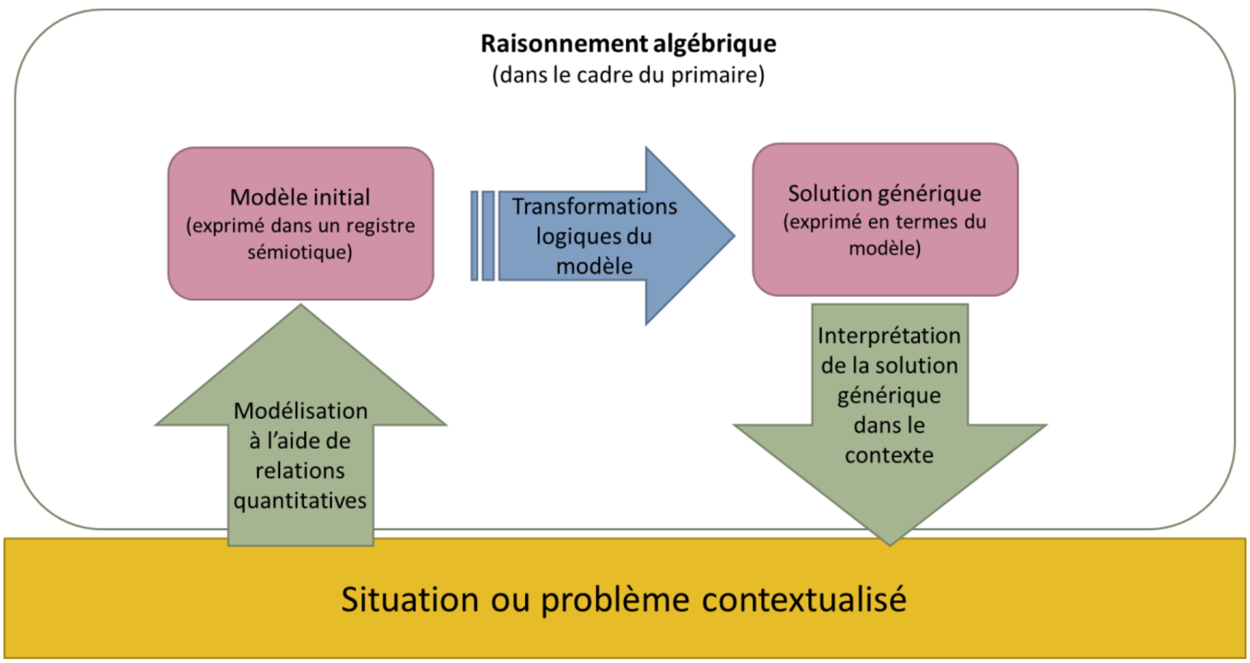
L'ensemble de la démarche méthodologique exploitée est du type qualitatif (Karsenti et Savoie-Zajc, 2011) et elle est inspirée des éléments de la démarche de recension des écrits (Fortin, 2010) et de la recherche documentaire (Piolat, 2002).

Pour réaliser notre synthèse des connaissances, nous avons effectué le projet en deux temps dans le but d'assurer et faciliter le triage initial des textes scientifiques et pour guider l'analyse et synthèse de l'ensemble des connaissances.

Premièrement, nous avons analysé les sources consacrées à l'apprentissage de l'algèbre au secondaire et surtout aux obstacles et difficultés associés à cet apprentissage. Cette démarche nous a permis de construire un modèle pragmatique de la pensée algébrique souhaitable au niveau primaire et à la maternelle. **Deuxièmement**, nous avons localisé 72 revues scientifiques et 3 livres (avec comité de lecture) les plus cités en didactique des mathématiques et dans des champs connexes. Nous avons aussi exploité les sources Canadiennes, Québécoises, et les sources moins connues dans des langues autres que anglais et français. **Troisièmement**, nous avons ciblé 175 articles publiés entre 2003 et 2019 (juillet) dans les revues sélectionnées qui traitaient le sujet de la pensée algébrique au primaire, à la maternelle ou en adaptation scolaire. **Quatrièmement**, nous avons utilisé le modèle construit et notre cadre d'analyse pour sélectionner 126 articles pertinents. **Finalement**, nous avons réalisé une lecture approfondie de chaque article, les avons codés dans le logiciel d'analyse qualitative ATLAS.ti. Nous avons poursuivi avec l'analyse approfondie de l'ensemble de données pour produire la synthèse de connaissances au sujet des pratiques au préscolaire et au primaire pouvant soutenir l'apprentissage de l'algèbre au secondaire.

PARTIE D – RÉSULTATS

Dans la première partie du projet, nous avons consulté les écrits scientifiques décrivant le problème de transition arithmétique-algèbre et les difficultés des élèves dans leur apprentissage de l'algèbre au secondaire (ex. Kieran, 1989; Bednarz et Janvier, 1993). Nous avons aussi étudié la vision contemporaine de la pensés algébrique qui est proposée à être développée chez les élèves au primaire (ex. Radford, 2010, 2011, 2018; Carraher et Schliemann, 2018; Davydov, 2008). Cette étude préliminaire nous a permis de construire un modèle pragmatique de la pensée algébrique dans des classes du primaire et à la maternelle.



Au primaire, la construction de la pensée algébrique commence dans une situation ou problème formulé dans un contexte compréhensible à l'élève, à l'aide d'objets physiques et leurs propriétés potentiellement mesurables ou quantifiables. Cette situation doit présenter des relations entre les quantités. La tâche doit inviter l'élève à analyser les relations entre les quantités et les modéliser en utilisant un des systèmes de représentations (autre que le contexte). La pensée algébrique se développe au départ lorsqu'on traduit la situation avec l'objectif de dégager des généralités et des relations. Le modèle sert à dégager des pistes de solutions, des stratégies, des opérations arithmétiques à effectuer. Ces stratégies formulées dans le contexte du modèle permettent de trouver la ou les solution(s) sous une forme générale, donc réutilisable dans d'autres contextes. La solution générale peut être ensuite interprétér pour lui donner du sens dans le contexte initial. Le passage contexte-modèle-contexte est l'élément crucial de l'apprentissage des mathématiques pour assurer le développement graduel de la pensée algébrique.

Dans la deuxième partie du projet, nous avons analysé 126 articles scientifiques provenant de 30 revues, 3 livres et deux colloques scientifiques. Cette analyse qualitative nous a permis d'identifier trois approches globales à la résolution du problème de rupture arithmétique-algèbre, de mettre en évidence les composantes de la pensée algébrique et ces concepts racines à développer chez les élèves du primaire et à la maternelle ainsi que de répertorier des activités potentiellement efficaces dans le développement de cette pensée.

Trois approches

- *Algèbre comme arithmétique généralisée* est une approche qui stipule que la pensée algébrique doit s'appuyer sur une connaissance arithmétique et l'expérience numérique de l'élève. Donc, il faut que l'élève d'abord forme une connaissance numérique et arithmétique et ensuite la généralise pour former des notions algébriques.
- *Ligne d'algèbre dans le curriculum du primaire* est une approche stipulant que certaines notions et contextes importantes à l'algèbre ne sont pas traitées en arithmétique. Donc, il faut ajouter des activités spécifiques au curriculum du primaire.
- *Pensée algébrique est à la base de l'arithmétique et de l'algèbre* est une approche qui stipule que les idées mathématiques les plus générales et fondamentales sont à la

base de l'apprentissage de l'arithmétique et de l'algèbre. Donc, il faut viser premièrement le développement de ces idées fondamentales au primaire et au préscolaire.

Cette troisième approche (Pasnak et al., 2009; Davydov, 2008; Carraher et al., 2005; Smith et Thompson, 2008) semble être la plus prometteuse et la plus proche au plan philosophique du *Programme de formation de l'école québécoise*. Cette approche met en avant l'enseignement des lois générales et fondamentales du monde mathématique (ex. conservation du nombre, commutativité etc.) plutôt que l'enseignement des notions spécifiquement algébriques séparément des notions arithmétiques. Cette approche, selon les auteurs, favorise spécifiquement le développement de la pensée mathématique chez les élèves identifiés comme « ayant de difficultés en mathématiques ou à risque de les avoir » (Warren, 2016).

Composantes de la pensée algébrique et ces concepts racines

Les travaux consultés décrivent les composantes de la pensée algébrique suivantes.

Généralisation des motifs (patterns). Cette composante de la pensée algébrique inclut l'habileté d'observer des motifs créés dans différents contextes (à l'aide de matériel varié), reconnaitre leur structure (ce qui se répète d'un élément à l'autre et ce qui change), décrire verbalement ou modéliser le principe-générateur du motif, continuer le motif en respectant le principe générateur du motif, construire les éléments selon leur position dans l'ensemble du motif, créer d'autres motifs selon le modèle ou selon la description du principe-générateur (ex. Wijns et al., 2019; Pasnak et al., 2017).

Pensée relationnelle (la compréhension de l'égalité est incluse dans cette composante). Cette composante de la pensée algébrique réfère à une habileté de voir une situation ou problème comme un ensemble de relations entre les quantités. Elle inclut l'habileté à reconnaitre des relations (ex. une quantité est composée de deux autres quantités ou 5=3+2), les décrire verbalement, les représenter (modéliser). Elle inclut la connaissance des liens entre les relations quantitatives et les opérations arithmétiques (Smith et Thompson, 2008; Polotskaia et Savard, 2018; Davydov, 1990; Carraher et Schliemann, 2018).

Pensée fonctionnelle. Cette composante réfère à la relation directe (fonctionnelle) entre deux quantités qui co-varient. La pensée fonctionnelle permet de reconnaitre telles relations dans des situations variées (ex. dans des cas de suites figuratives croissantes, la relation fonctionnelle est la relation entre la position de la figure et le nombre d'éléments composant la figure), les décrire verbalement, les exprimer en notation mathématique. Cette pensée permet de voir la relation dans deux directions (si on connait la position de la figure, on peut trouver le nombre de ses éléments et si on connait le nombre d'éléments, on peut trouver dans quelle position de la suite la figure apparait). À part des suites, il existe d'autres situation potentiellement présentant des relations de type fonctionnelle. Carraher (Carraher et al., 2005) propose étudier ces relations dans le contexte de résolution de problèmes écrits traditionnels (ex. un mouvement à une vitesse constante présente une relation fonctionnelle entre le temps et la distance).

Pensée récursive. Ce type de pensée permet de voir la relation entre une figure de la suite (deux nombres consécutifs dans une suite numérique) et son successeur. Cette pensée permet de construire les figures (nombres dans les cas de suites numériques) de la suite un après l'autre, mais elle ne permet pas de construire un élément éloigné en sachant le rang ordinal de sa position.

Modélisation (l'utilisation des lettres est incluse dans cette composante). Cette pratique de réflexion mathématique consiste à représenter une situation (problème, motif) en utilisant un système de représentation **autre** que le système dans lequel la situation a été formulée initialement. Par exemple, pour un problème écrit, on peut utiliser les schémas Range-Tout (Polotskaia et Savard, 2018); pour une situation avec des objets physiques on peut utiliser la notation littérale etc. Cette nouvelle représentation (modèle) démontre les relations entre les quantités et exprime le sens mathématique de la situation. La modélisation est un outil de pensée et de communication qui permet de comprendre la situation, généraliser les relations en question, dégager des stratégies de solution générale etc.

Les auteurs consultés affirment que plusieurs principes fondamentaux qui soutiennent la pensée mathématiques et algébrique peuvent être formés chez les jeunes élèves très tôt. Cette connaissance est indispensable pour assurer le progrès efficace de l'élève dans son apprentissage. Par contre, pour commencer le développement des composantes de la pensée algébrique certains concepts racines semblent être indispensables. Les chercheurs (ex. Pasnak, 2009; Lai & al., 2008) proposent d'introduire ces concepts aux élèves de la maternelle et à la première année du primaire. Nous présentons ici une liste des concepts racines mentionnés dans les écrits scientifiques consultés.

Conservation du nombre et de quantité. Ce principe fondamental, décrit par Piaget, réfère à la compréhension que, par exemple, le **nombre** d'objets dans une collection ne change pas si on change la disposition de ces objets, sans ajouter ou enlever des objets.

Principe de sériation. Ce principe réfère à une habileté de reconnaitre le principe à la base de l'ordre dans lequel les objets sont organisés. Si l'enfant doit insérer un objet dans la série, il doit se référer à ce principe (selon les caractéristiques de l'objet) pour trouver la place appropriée.

Principe d'intrus. On analyse une collection de 3-4 objets du point de vue de leurs caractéristiques. On cherche les ressemblances et les différences. Selon la (ou les) caractéristique(s) choisie(s), un objet devient un intrus parmi une collection des objets semblables.

Commutativité de l'addition. Le principe de la commutativité réfère à une compréhension que le résultat de la réunion de deux quantités ne dépend pas de l'ordre dans lequel ces quantités ont été réunies (A+B=B+A). Les quantités peuvent être d'origines variées (mais on réunit toujours les quantités d'une même origine), par exemple les deux verres d'eau mis dans une vase (volume), ou les deux bandes de papier collées une après l'autre (longueur) (Davydov, 1990).

Principe d'inversibilité de l'addition. Il s'agit de de comprendre que si on ajoute une quantité (+A) à une quantité initiale (B) et ensuite, on enlève une quantité équivalente (-A), la quantité initiale ne change pas. Par exemple, si deux voitures rentrent dans le garage et deux voitures en sortent, l'ensemble de voitures dans le garage a probablement changé, mais la **quantité** de voitures dans le garage est demeurée sans changement (Lai & al., 2008).

Les chercheurs montrent que les concepts mentionnés sont à la portée des jeunes élèves. Ils démontrent aussi que les activités spécialement conçues pour former ces concepts chez les jeunes au début de l'apprentissage des mathématiques favorisent l'acquisition des autres connaissances en numéracie et en littéracie. Il s'agit donc d'un enseignement développemental, permettant l'élève à développer ces habiletés d'apprentissage et ainsi réduire la possibilité de difficultés plus tard.

Conclusion

Dans notre projet, nous avons posé un regard didactique sur un ensemble de données scientifiques concernant la rupture arithmétique-algèbre et les pistes de solution à ce problème. Notre recherche apporte une vision globale et en même temps plus profonde sur le sujet. Elle démontre une richesse des théories disponibles et approfondit la compréhension des composantes de la pensée algébrique à développer au niveau primaire et à la maternelle. Elle suggère la « faisabilité » de tel projet en soulignant le potentiel non exploité des élèves.

Les chercheurs du monde ont développé des approches théoriques et proposé des pratiques d'enseignement efficaces pour affronter le problème de rupture et aider les élèves. L'ensemble de ces connaissances ouvre une porte aux changement importants dans l'enseignement des mathématiques au primaire et à la maternelle.

PARTIE E – PISTES DE RECHERCHE

Les approches étudiées dans notre projet sont toujours en expérimentation et les pratiques enseignantes trouvées ne représentent pas un système cohérent d'enseignement des mathématiques pour **assurer** le développement de la pensée algébrique chez les élèves suffisant à éliminer les difficultés identifiées. Par exemple, nous n'avons pas trouvé de recherche intégrant toutes les composantes de la pensée algébrique dans l'enseignement pour examiner des effets de telle intervention à long terme.

Presque tous les chercheurs qui ont expérimenté des activités et des approches concernant la pensée algébrique ont réalisé les interventions auprès des élèves par eux-mêmes ou ont formé les enseignants avant la réalisation des interventions. Nombreux soulignent que la formation actuelle des enseignants ne correspond pas à la demande d'un enseignement « algébrisé » de l'arithmétique. Nous n'avons pas examiné les recherches concernant la formation continue des enseignants, car ce n'est pas dans le cadre de notre projet. Il est important de questionner l'expérience existante et les difficultés potentielles sur le chemin de changement profond de la conception de la mathématique enseignée chez les enseignants.

Parmi des recherches consultées, il y a une qui porte sur le contenu des manuels scolaires (working sheets) et questionne particulièrement la forme de présentation des opérations et des équations simples (McNeil et al. 2011). Les chercheurs constatent que le matériel éducatif exploite mal les écritures possibles contenant le signe « = ». Leur expérimentation (McNeil et al. 2019) démontre que les changements de la forme de l'écriture et certaines stratégies simples d'enseignement, affectent très positivement la compréhension du signe « = » par les élèves. Il est possible que d'autres aspects du contenu et de la présentation des tâches mathématiques dans des manuels scolaires soient critiques à la formation de la pensée algébrique des élèves. Plus de recherches sont nécessaires pour clarifier le sujet.

PARTIE F – RÉFÉRENCES

Nous présentons ici seulement les références utilisées dans ce document. La liste complète des articles analysés se trouve dans l'Annexe II.

Bednarz, N., & Janvier, B. (1993). The arithmetic-algebra transition in problem solving: Continuities and discontinuities. In *Proceedings of the 15th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (North American chapter PME-NA* (Vol. 2, pp. 19–25). Asilomar, California.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2018). Cultivating Early Algebraic Thinking. In *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 107–138). https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_5

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. M. (2005). Chapter 1 : Treating the Operations of Arithmetic as Functions. Chapter 1 : Treating the Operations of Arithmetic as Functions, *13*(2005).

Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction: a theoretical and experimental psychological study*. Hauppauge, NY: Nova Science Publishers.

Davydov, V. V. (1990). Types of generalization in instruction : Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. In *Soviet studies in mathematics education Volume 2* (Vol. 2). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Fortin, M.-F. (2012). La recention des écrits. In *Fondements et étapes du processus de recherche. Méthodes quantitaties et qualitatives* (pp. 133–166).

Hughes, E., Witzel, B., Riccomini, P. J., & Fries, K. M. (2014). A Meta-Analysis of Algebra Interventions for Learners with Disabilities and Struggling Learners. *The Journal of the International Association of Special Education*, *15*(1), 36–47.

Karsenti, T., & Savoie-Zajc, L. (2011). La recherche-action. In *La recheerche en éducation. Étapes et approches* (pp. 183–211). Saint-Laurent, QC: ERPI.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33–56). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates. Retrieved from http://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:The+Early+Learning+of+Algebra:A+Structural+Perspective#0

Lai, M., Baroody, A. J., & Johnson, A. R. (2008). Fostering Taiwanese preschoolers' understanding of the addition-subtraction inverse principle. *Cognitive Development*, *23*(1), 216–235. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2007.06.002

Lee, J.-E. (2006). Teaching algebraic expressions to young students : The three-day journey of " a + 2 ." *School Science and Mathematics*, *106*(2), 98–104.

Malara, N. A., & Navarra, G. (2018). New Words and Concepts for Early Algebra Teaching: Sharing with Teachers Epistemological Issues in Early Algebra to Develop Students' Early Algebraic Thinking. In *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 51–77). https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_3

Mason, J. (2018). How Early Is Too Early for Thinking Algebraically? In *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 329–350). https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_14

McNeil, N. M., Fyfe, E. R., Petersen, L. a, Dunwiddie, A. E., & Brletic-Shipley, H. (2011). Benefits of practicing 4 = 2 + 2: nontraditional problem formats facilitate children's understanding of mathematical equivalence. *Child Development*, *82*(5), 1620–1633. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2011.01622.x

McNeil, N. M., Hornburg, C. B., Brletic-Shipley, H., & Matthews, J. M. (2019). Improving Children's Understanding of Mathematical Equivalence via an Intervention That Goes Beyond Nontraditional Arithmetic Practice. *Journal of Educational Psychology*, *111*(6), 1023–1044. https://doi.org/10.1037/edu0000337

MELS. (2001). Programme de formation de l'école québecoise. Éducation prescolaire. Enseignement primaire. Québec, QC: Guvernement du Québec. Retrieved from http://www1.mels.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/pdf/prform2001.pdf

MELS. (2009). Document d'accompagnement, Progression des apprentissages, Mathématique. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Pasnak, R., Kidd, J. K., Gadzichowski, M. K., Gallington, D. A., Saracina, R. P., & Addison, K. T. (2009). Promoting early abstraction to promote early literacy and numeracy. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *30*(3), 239–249. https://doi.org/10.1016/j.appdev.2008.12.006

Piolat, A. (2002). *La recherche documentaire. Manuel à l'usage des étudiants, doctorants et jeunes chercheurs.* Marseille : Solal.

Polotskaia, E., & Savard, A. (2018). Using the Relational Paradigm: effects on pupils' reasoning in solving additive word problems. *Research in Mathematics Education*, *20*(1), 70–90. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1442740

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 1–19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741

Schmittau, J. (2005). The development of algebraic thinking. A Vygotskian perspective. *ZDM Mathematics Education*, *37*(1), 16–22.

Squalli, H. (2017). La généralisation algébrique : une analyse phénoménologique. *RMDM*, *2*, 19–27.