Fonds de recherche
Société et culture
Québec

Rapport de recherche

PROGRAMME ACTIONS CONCERTÉES

La réussite en mathématiques au secondaire commence à la maternelle: Synthèse des connaissances sur les pratiques d'enseignement des mathématiques efficaces à la maternelle et au primaire pour réussir l'algèbre du secondaire?

Chercheure principale
Elena Arkhipova, Université du Québec en Outaouais

Cochercheurs
Annie Savard, Université McGill
Nathalie Silvia Anwandter Cuellar, Université du Québec en Outaouais

Collaborateurs
Claudine Gervais, Commission scolaire des Grandes-Seigneuries
Marie-Sophie Gélinas, Commission scolaire de la Vallée-des-Tisserands
Valériane Passaro, Université de Montréal
Ildiko Pelczer, Université Concordia
Vanessa St-Jacques, étudiante à la maitrise, UQO
Marie-Christine Gauthier, étudiante à la maitrise, UQO
Alexandre Cavalcante, étudiant au doctorat, McGill
Azadeh Javaherpour, étudiante au doctorat, McGill
Ali Motlagh, étudiant au doctorat, McGill
Amélie Poulin, étudiante au baccalauréat, McGill
Steve Tremblay, étudiant au doctorat, UQAM

Établissement gestionnaire de la subvention
Université du Québec en Outaouais

Numéro du projet de recherche (synthèse des connaissances)
2019-0PZS-264486

Titre de l'Action concertée
Programme de recherche sur la persévérance et la réussite scolaires

Partenaires de l'Action concertée
Le Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur (MEES)
et le Fonds de recherche du Québec – Société et culture (FRQSC)

Recommandations

1. Mettre en place une formation spécifique pour les futurs enseignants et les enseignants en poste.

Plusieurs chercheurs (ex. Malara et Navarra, 2018) constatent que les enseignants ne possèdent pas les compétences et habiletés nécessaires à la mise en œuvre de pratiques efficaces pour le développement de la pensée algébrique dès la maternelle. En effet, ils ne sont pas initiés à de telles approches ni en tant qu'élève, ni dans leur formation initiale à l'enseignement puisqu'il s'agit de connaissances scientifiques récentes. Par ailleurs, les connaissances en algèbre formelle acquises au secondaire et au collégial sont insuffisantes puisqu'elles ne correspondent pas aux contenus de ces nouvelles pratiques qui s'appuient en fait sur les principes implicites à la source de ces connaissances.

2. Prioriser l'enseignement d'un regard relationnel sur l'arithmétique.

Traditionnellement, les objets arithmétiques sont traités comme des processus. Par exemple, 2 + 3 = 5 est lu de gauche à droite et interprété comme « ajouter 3 à 2 donne 5 ». Cette vision opérationnelle attire l'attention sur le résultat obtenu, soit 5. En contrepartie, adopter un regard relationnel implique de prendre en considération l'ensemble de l'équation : 2 + 3 = 5 exprime la relation d'équivalence entre deux expressions arithmétiques (2+3 et 5), 2 + 3 et 5 représentent donc la même quantité. Cette vision relationnelle attire l'attention sur la relation d'équivalence entre 2 + 3 et 5.

Le regard relationnel permet de mettre en évidence les lois ou propriétés fondamentales de l'arithmétique et de l'algèbre (exemple : la commutativité de l'addition, a+b=b+a). L'étude de ces lois contribue positivement à la construction de connaissances arithmétiques aussi bien qu'algébriques. Certains auteurs proposent d'aborder l'étude de ces lois par la généralisation de l'expérience arithmétique (numérique) de l'élève. Cette approche est celle de « l'algèbre comme arithmétique généralisée ». Par exemple, l'élève peut remarquer que 2+3=3+2, que 5+7=7+5, que 12+9=9+12, etc. et ainsi induire que c'est probablement vrai pour tous les nombres.

D'autres proposent d'introduire d'abord ces lois aux élèves dans le contexte de comparaison qualitative de grandeur physique (longueur, volume, poids…). Ensuite, ces lois sont exploitées dans les contextes arithmétiques (numériques) et algébriques. Cette dernière approche peut être identifiée comme «algèbre à la base de l'arithmétique ». Par exemple, la commutativité observée sur deux longueurs juxtaposées (bandes de papier) et généralisée dès le début à l'aide du langage mathématique (A+B=B+A) se transfère facilement sur les cas d'addition de nombres naturels ou de termes algébriques.

Donc 5+6=6+5 et 2x+3y=3y+2x.

3. Introduire les lettres comme représentant des quantités dès le début de l'apprentissage.

La notation littérale est très utile pour exprimer et communiquer les relations et les lois fondamentales dans une forme générale, concentrée, et facilement observable. Il a été démontré que l'utilisation des lettres dans la communication mathématique n'est pas un obstacle et les élèves dès 5-6 ans peuvent en profiter pour apprendre à généraliser et développer des idées mathématiques de plus en plus abstraites et complexes. Les auteurs (ex. Davydov, 2008; Lee, 2006; Hewitt, 2012) expliquent que l'utilisation des lettres en mathématique est un outil développé au sein de la culture mathématique et les enfants peuvent l'apprendre, comme tous les autres outils culturels, par l'immersion. L'élève doit donc être exposé à l'utilisation et aux contraintes de l'outil que sont les lettres en mathématiques et être invité à l'employer dans ses réflexions et ses communications mathématiques.

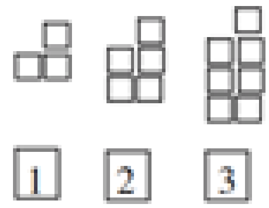
Notons que l'usage de la lettre en mathématique est varié. La lettre peut désigner une quantité constante, connue ou inconnue, une quantité variable ou un nombre général.

4. Promouvoir l'étude des cas complexes.

Plusieurs chercheurs (ex. Heuvel-Panhauzen et al. 2013; Smith et Thompson, 2008) proposent que seule la résolution de problèmes présentant des relations quantitatives complexes assure le développement du raisonnement mathématique profond et flexible. Un problème complexe (présentant plusieurs relations entre des données) demande une analyse plus sophistiquée et une planification plus élaborée qu'un problème simple (présentant une seule relation). Face à un problème complexe, les élèves développent à la fois la flexibilité à choisir et utiliser les outils de pensée acquis, et de nouveaux outils cognitifs et métacognitifs. De plus, c'est dans ce contexte que les lois fondamentales des mathématiques, le regard relationnel ainsi que les stratégies de raisonnement variées prennent un sens et deviennent des outils essentiels pour l'élève.

5. Exposer les élèves à des situations dans lesquelles des quantités co-varient.

Pour préparer les élèves à l'étude des fonctions au secondaire, plusieurs auteurs proposent l'utilisation de tâches dans lesquelles l'élève doit analyser la dépendance entre deux quantités qui peuvent prendre plusieurs valeurs. Exemple : l'étude d'une suite de figures croissante dans laquelle le nombre d'éléments de chaque figure dépend de la position de la figure dans la suite et vice et versa.



D'autres auteurs proposent de simplement ajouter une réflexion sur la covariation à partir de problèmes écrits traditionnels. Par exemple, à partir du problème suivant : *Anna a 5 crayons et Marta a 3 crayons de plus qu'Anna. Combien de crayons Marta a-t-elle?*, il est possible d'amener les élèves à réfléchir sur la covariation des nombres de crayons d'Anna et de Marta. On peut, par exemple, poser les questions suivantes: *Si Anna a 2 crayons, que peut-t-on dire sur le nombre de crayons de Marta? Et si Anna a 10 crayons? Et si Anna a x crayons, comment peut-on exprimer le nombre de crayons de Marta?* Les auteurs soulignent que la compréhension de la notion de « variable », nécessaire au secondaire, se développe à travers des situations dans lesquelles on s'intéresse à des quantités qui varient. Ainsi, ainsi il est important d'initier les élèves à ce type de situations dès le primaire.

6. Travailler davantage et de façon plus explicite la composante modélisation de la compétence à résoudre des problèmes.

La modélisation est reconnue par les chercheurs comme un outil de raisonnement et de généralisation mathématique. Ils (ex. Corral, 2019; Davydov, 2008; Mason, 2018) soulignent que, de point de vue de l'apprentissage, l'utilisation des représentations est efficace si la représentation joue le rôle de modèle de l'objet ou de la situation étudiée. Par exemple, si les élèves analysent une suite répétitive formée de blocs géométriques (carré, cercle, cercle, carré, cercle, cercle…) l'enseignant peut proposer de modéliser la suite comme ABBABBABB et ensuite demander aux élèves de construire d'autres exemples qui correspondent à ce modèle (rouge, vert, vert, rouge, vert, vert ou grand, petit, petit, grand, petit, petit). Habituellement, ce qui est représenté par le modèle est l'ensemble de relations essentielles qui détermine le sens mathématique de l'objet ou de la situation. La pratique de la modélisation favorise alors la généralisation et l'acquisition des relations mathématiques et des lois fondamentales de l'arithmétique et de l'algèbre.

7. Favoriser l'apprentissage de représentations permettant la modélisation et ainsi la généralisation.

Les représentations, telles que droite numérique, plan cartésien, tableaux, schématisation Range-Tout, l'utilisation des lettres et symbolisme mathématique, etc., sont des outils de raisonnement et de modélisation mathématique. Les chercheurs constatent qu'une simple utilisation de représentations variées dans l'apprentissage des mathématiques n'est pas suffisante. En effet, pour assurer l'accès de tous les élèves à la généralisation et au développement des idées de plus en plus abstraites, l'usage et la compréhension de **certaines représentations** sont essentielles. Toutefois, chaque outil de représentations doit être utilisé en cohérence avec le but de l'apprentissage. Par exemple, une représentation par dizaines et unités facilite le calcul et l'apprentissage du système de numération. Par contre dans le cas de résolution d'un problème écrit, on cherche premièrement l'opération ou les opérations à effectuer. Donc dans ce cas, pour analyser les relations entre les données une représentation Range-Tout est plus pertinente. Les systèmes de représentations spécifiques doivent être introduits aux moments où le contenu d'apprentissage l'exige et que les élèves en ressentent le besoin pour faciliter leur communication mathématique. De plus, les chercheurs soulignent l'importance de varier les outils de représentations ainsi que les modes de pensée mathématique pour outiller les élèves avec **un ensemble de stratégies** plutôt que de favoriser une stratégie particulière. Par conséquent, il ne faut pas limiter la résolution de problèmes à l'utilisation de stratégies algébriques. Les stratégies arithmétiques ou autres sont parfois plus efficaces.

8. Favoriser la discussion mathématique en classe.

Tous les chercheurs insistent sur l'adoption d'une culture de discussion mathématique en classe. Cette culture inclut, entre autres, l'utilisation d'un langage mathématique adéquat, la valorisation du raisonnement de chaque élève (même si ce raisonnement n'est pas clair, n'est pas complet ou n'est pas correct). Chaque élève est invité à proposer sa vision de la situation, formuler une hypothèse, partager sa stratégie. Chaque opinion doit être discutée, justifiée et clarifiée pour tous les élèves. Le temps utilisé pour les discussions mathématiques n'est pas perdu, mais investi dans le développement des élèves comme penseurs mathématiques. Au sein de cette culture, l'erreur mathématique est un levier d'apprentissage plutôt qu'un problème ou un obstacle. Dans plusieurs expérimentations, les élèves ont été invités à analyser des erreurs commises par un personnage inventé, des situations mathématiquement impossibles ou des communications mathématiques incorrectes. Tous ces outils didactiques favorisent le développement du raisonnement mathématique des élèves et contribuent positivement à leur développement personnel et social.

9. Varier l'enseignement selon la nature du contenu enseigné.

Dans les expérimentations rapportées et consultées, les méthodes d'enseignement varient selon les buts de l'activité et les différents contenus abordés. Par exemple, lors des activités d'étude de suites de motifs, les élèves ont eu besoin d'une explication sur « comment analyser les motifs et à quoi porter attention pour dégager le modèle » (enseignement explicite). En utilisant cette nouvelle connaissance, les élèves ont analysé plusieurs suites pour en découvrir les règles récursives et fonctionnelles de façon presque autonome (enseignement par problématisation). Par contre, les élèves ont été constamment invités à respecter la culture mathématique en justifiant leurs idées et en discutant les stratégies proposées par leurs pairs (enseignement par immersion).