Fonds de recherche
Société et culture
Québec

Rapport de recherche

PROGRAMME ACTIONS CONCERTÉES

La réussite en mathématiques au secondaire commence à la maternelle: Synthèse des connaissances sur les pratiques d'enseignement des mathématiques efficaces à la maternelle et au primaire pour réussir l'algèbre du secondaire?

Chercheure principale
Elena Arkhipova, Université du Québec en Outaouais

Cochercheurs
Annie Savard, Université McGill
Nathalie Silvia Anwandter Cuellar, Université du Québec en Outaouais

Collaborateurs
Claudine Gervais, Commission scolaire des Grandes-Seigneuries
Marie-Sophie Gélinas, Commission scolaire de la Vallée-des-Tisserands
Valériane Passaro, Université de Montréal
Ildiko Pelczer, Université Concordia
Vanessa St-Jacques, étudiante à la maitrise, UQO
Marie-Christine Gauthier, étudiante à la maitrise, UQO
Alexandre Cavalcante, étudiant au doctorat, McGill
Azadeh Javaherpour, étudiante au doctorat, McGill
Ali Motlagh, étudiant au doctorat, McGill
Amélie Poulin, étudiante au baccalauréat, McGill
Steve Tremblay, étudiant au doctorat, UQAM

Établissement gestionnaire de la subvention
Université du Québec en Outaouais

Numéro du projet de recherche (synthèse des connaissances)
2019-0PZS-264486

Titre de l'Action concertée
Programme de recherche sur la persévérance et la réussite scolaires

Partenaires de l'Action concertée
Le Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur (MEES)
et le Fonds de recherche du Québec – Société et culture (FRQSC)

Beckmann, S. (2004). Solving algebra and other story problems with simple diagrams: A method demonstrated in grade 4-6 texts used in Singapore. The Mathematics Educator, 14(1).

L'objectif principal de cette recherche quantitative était de démontrer que les méthodes utilisées pour présenter les premiers concepts d'algèbre dans les manuels de Singapour et les schémas simples qui les accompagnent peuvent être des facteurs importants pour la réussite en mathématiques des élèves de l'élémentaire. Cette étude a été menée auprès d'élèves de la 4e à la 6e année (âgés de 9 à 12 ans) et compare les résultats d'élèves américains avec ceux d'étudiants singapouriens en situation de résolution de problèmes.

Le développement de différents concepts d'algèbre est généralement complexe pour les enfants. Cet article montre donc aux enseignants du monde entier un moyen de présenter ces nouvelles connaissances à leurs élèves par le biais d'outils de représentation efficaces. La méthode pour résoudre des problèmes d'algèbre et d'histoire à l'aide de diagrammes simples est illustrée dans l'article avec différentes figures comme celles-ci.

Mary made 686 biscuits. She sold some of them. If 298 were left over, how many biscuits did she sell? (*Primary Mathematics* volume 3A, page 20, problem 4)

The problem is accompanied by a strip diagram like the one shown in Figure 1.

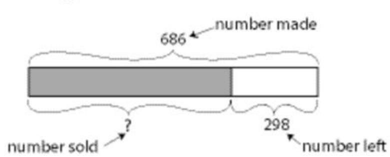


Figure 1: How Many Biscuits Were Sold?

David spent 2/5 of his money on a storybook. The storybook cost $20. How much money did he have at first? (*Primary Mathematics* volume 4A, page 62, problem 11)

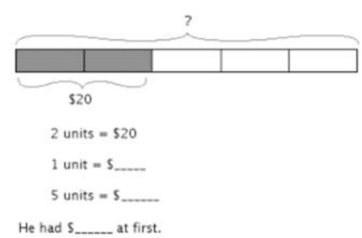


Figure 4: How Much Money Did David Have?

Avec cette méthode utilisée dans les textes de Singapour, les étudiants semblent comprendre les problèmes difficiles et comprendre comment résoudre ces équations arithmétiques à l'aide de la manipulation de diagrammes. Les élèves de Singapour ont démontré des capacités plus fortes que les élèves des États-Unis lors de leur évaluation TIMSS (évaluation des études internationales de mathématiques et de sciences) en 8e année, obtenant des scores plus élevés pour tous les éléments. Les résultats de cette recherche suggèrent que la représentation des quantités avec des dessins de diagrammes à bandes dans les textes de Singapour était un moyen efficace pour les étudiants de comprendre des notions mathématiques complexes et d'éviter les difficultés d'apprentissage de l'algèbre dans les années supérieures.

L'adaptation à différents niveaux d'élèves est également possible dans les salles de classe. Comme nous pouvons le constater dans les deux représentations ci-dessus (Figure 1 et Figure 4), les enseignants peuvent ajuster le niveau des problèmes en fonction de la diversité de leurs élèves. Différents concepts mathématiques peuvent être explorés, sachant qu'il semble plus facile pour les élèves de visualiser les inconnues avec un diagramme.

L'auteur mentionne qu'apprendre avec cette méthode, outre l'utilisation de textes similaires, pourrait amener les étudiants d'autres pays à renforcer leurs capacités de résolution de problèmes et à améliorer leurs performances en raisonnement mathématique.

Beckmann, S. (2004). Solving algebra and other story problems with simple diagrams: A method demonstrated in grade 4-6 texts used in Singapore. The Mathematics Educator, 14(1).

The main goal of this quantitative research was to demonstrate that the methods used to present early algebra concepts in Singapore textbooks and the simple diagrams that accompany them can be significant factors in elementary students' mathematics achievement. This study was conducted with grade 4-6 students (9 to 12 years-old) and compares the results of USA students with those from Singapore students in problem-solving situations.

The development of different algebra concepts is usually complex for children, so this article shows a way for teachers around the world to introduce this new knowledge to their students through effective representational tools. The method for solving algebra and story problems with simple diagrams is demonstrated in the article with different figures like these subsequent ones.

Mary made 686 biscuits. She sold some of them. If 298 were left over, how many biscuits did she sell? (*Primary Mathematics* volume 3A, page 20, problem 4)

The problem is accompanied by a strip diagram like the one shown in Figure 1.

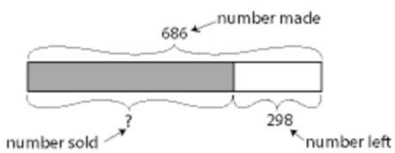


Figure 1: How Many Biscuits Were Sold?

David spent 2/5 of his money on a storybook. The storybook cost $20. How much money did he have at first? (*Primary Mathematics* volume 4A, page 62, problem 11)

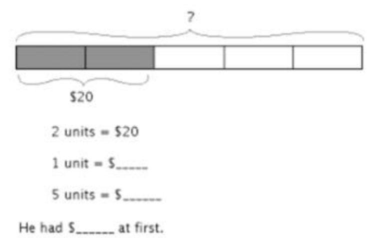


Figure 4: How Much Money Did David Have?

With this method used in Singapore texts, students appear to make sense of the difficult problems and understand how to solve those arithmetic equations with the manipulation of diagrams. Singapore students demonstrated stronger abilities than USA students on their 8^{th} grade TIMSS *(Trends in International Mathematics and Science Study assessment*), performing higher scores on all items. The findings of this research suggest that the representation of quantities with drawings of strip diagrams in Singapore's texts was a successful way for students to understand complex mathematics notions and to avoid learning difficulties in algebra in higher grades.

Adaptation for different level of students is also a possible in classrooms. As we can notice in the two representations above (*Figure 1 and Figure 4*), teachers can adjust the level of the problems depending on the diversity of their students. Various mathematics concepts can be explored, knowing that it seems to be easier for students to visualize the unknowns with a diagram.

The author mentions that learning with this method, in addition to the use of similar texts could lead students in other countries to reinforce their problem-solving abilities and improve their performance in mathematics reasoning.

Blanton, M., Stroud, R., Stephens, A., Gardiner, A., Stylianou, D., Knuth, E., Isler-Baykal, I., Strachota, A. (2019). Does Early Algebra Matter? The Effectiveness of an Early Algebra Intervention in Grades 3 to 5. American Educational Research Journal, 56(5), 1930–1972.

Le but de cette étude était d'examiner l'efficacité d'une intervention précoce en algèbre auprès d'un groupe diversifié d'étudiants. L'intervention n'avait pas un seul objectif, mais était plutôt répartie sur toute l'année scolaire et touchait de nombreux aspects de l'algèbre ancienne. Les résultats de cette recherche reposent sur une étude quantitative à laquelle ont participé 46 écoles de trois districts scolaires. Les enseignants des classes ont enseigné aux élèves des écoles de traitement l'intervention habituelle en mathématiques.

L'intervention a consisté en 18 leçons d'une heure pour chacune des classes 3 à 5, avec des leçons données tout au long de l'année scolaire (environ de septembre à mars). Les leçons avaient pour but d'impliquer les étudiants dans les pratiques de pensée algébriques consistant à généraliser, représenter, justifier et raisonner à l'aide de structures et de relations mathématiques au sein des grandes idées d'arithmétique généralisée; équivalence, expressions, équations et inégalités; et pensée fonctionnelle.

Les leçons ont commencé par un « démarrage » de 15 minutes conçu pour passer en revue les concepts précédents ou pour inciter les étudiants à réfléchir au concept à aborder dans la leçon donnée. Ils sont ensuite passés à une activité d'enquête ou à un ensemble d'activités au cours desquelles les élèves ont exploré l'objet de la leçon au moyen de travaux en petits groupes. Enfin, les leçons se sont terminées par une discussion en groupe des conclusions des élèves, suivie d'un bref révision et discussion qui a servi d'évaluation formative. Toutes les leçons ont mis l'accent sur le développement d'un sens pour les idées mathématiques en impliquant les étudiants dans l'explication de leur pensée, à la fois oralement et par écrit. Les auteurs fournissent un exemple de cours pouvant être utilisé en 3e année pour l'arithmétique généralisée.

Démarrage

1. Lesquelles des équations suivantes sont vraies? Explique.

14 - 14 = 0 394 + 0 = 394

17 + 5 = 23 + 5 30 + (10 + 19) = (30 + 10) + 19

2. Marta a 6 bonbons. Son amie Sarah a 9 bonbons. Comment représenteriez-vous la relation entre le nombre de bonbons qu'ils ont? En utilisant les mêmes chiffres, pouvez-vous représenter la relation de manière différente?

Enquête en petit groupe

A. Lesquelles des équations suivantes sont vraies? Utilisez des chiffres, des images, des cubes ou des mots pour expliquer votre raisonnement.

17 + 5 = 5 + 17 20 + 15 = 15 + 20

148 + 93 = 93 + 148

B. Quels nombres rendent les équations suivantes vraies?

25 + 10 = ___ + 25 ___ + 237 = 237 + 395

38 + __ = ___ + 38

C. Que remarquez-vous à propos de ces problèmes? Écrivez une conjecture sur ce que vous remarquez avec vos propres mots.

D. Écris ta conjecture sous forme d'équation (avec des variables). Que représentent vos variables?

E. Pouvez-vous écrire votre équation d'une manière différente?

F. Pour quels nombres ta conjecture est-elle vraie? Utilisez des nombres, des cubes, des images ou des mots pour expliquer votre raisonnement.

G. Trouvez ce qui suit. Réfléchissez à la manière dont vous pourriez utiliser les propriétés que vous avez apprises dans les leçons 3 et 4.

95 + 39 - 39 + 12 68 + 27 + 32 - 27

Réviser et discuter

1. 23 + 17 = 17 + 23 est-il vrai ou faux? Quelle est une autre façon d'écrire cette équation en utilisant uniquement ces nombres, de sorte que l'équation soit toujours vraie?

2. ___ + 0 = 0 + ____. Quels nombres rendront cette équation vraie?

3. Kara a déclaré que vous pouviez utiliser n'importe quel nombre entre (2) et qu'elle pouvait représenter 'tout nombre' avec une variable. Elle a représenté cette idée de la manière suivante: b + 0 = 0 + b. Marcus accepta mais écrivit c + 0 = 0 + b. Êtes-vous d'accord avec la façon dont Marcus a représenté l'idée? Explique.

Les résultats montrent qu'en 3e année, les étudiants en traitement, y compris ceux vivant dans des environnements à risque, se sont améliorés beaucoup plus rapidement que les étudiants du groupe témoin avec les deux mesures de résultats et ont conservé leur avantage tout au long de l'intervention. Les élèves de 3e année ont été particulièrement habiles à utiliser des stratégies algébriques pour résoudre des tâches, comparativement aux élèves suivant un enseignement arithmétique régulier. L'article conclut donc que des interventions telles que celle décrite ici sont efficaces pour préparer les élèves à l'algèbre dans les années à venir, facilitant ainsi leur transition vers le secondaire.

Blanton, M., Stroud, R., Stephens, A., Gardiner, A., Stylianou, D., Knuth, E., Isler-Baykal, I., Strachota, A. (2019). Does Early Algebra Matter? The Effectiveness of an Early Algebra Intervention in Grades 3 to 5. American Educational Research Journal, 56(5), 1930–1972.

The goal of this study was to examine the effectiveness of an early algebra intervention among a diverse group of students. The intervention did not have one single focus, but it was rather spread throughout the school year and touched on many aspects of early algebra. The results of this research were based on a quantitative study with 46 schools in three school districts participated. Students in treatment schools were taught the intervention by classroom teachers during regular mathematics instruction.

The intervention consisted of 18 one-hour lessons at each of Grades 3 to 5, with lessons taught throughout the school year (approximately September through March). The lessons were designed to engage students in the algebraic thinking practices of generalizing, representing, justifying, and reasoning with mathematical structures and relationships within the big ideas of generalized arithmetic; equivalence, expressions, equations, and inequalities; and functional thinking.

Lessons began with a 15-minute “Jumpstart” constructed to review previous concepts or prompt students’ thinking about the concept to be addressed in the given lesson. They then transitioned into an investigative activity or set of activities in which students explored the particular lesson focus through small group work. Finally, lessons concluded with a whole-group discussion of students’ findings, followed by a brief “Review and Discuss” that served as a formative assessment. All lessons emphasized developing meaning for mathematical ideas by engaging students in explaining their thinking, both orally and in writing. The authors provide an example of a lesson that can be used in grade 3 for generalized arithmetic.

Jumpstart

1. Which of the following equations are true? Explain.

14 - 14 = 0	394 + 0 = 394
17 + 5 = 23 + 5	30 + (10 + 19) = (30 + 10) + 19

2. Marta has 6 pieces of candy. Her friend, Sarah, has 9 pieces of candy. How would you represent the relationship between the numbers of pieces of candy they have? Using the same numbers, can you represent the relationship in a different way?

Small group investigation

A. Which of the following equations are true? Use numbers, pictures, cubes, or words to explain your reasoning.

17 + 5 = 5 + 17	20 + 15 = 15 + 20
148 + 93=93 + 148	

B. What numbers make the following equations true?

25 + 10 = ___ + 25	___ + 237 = 237 + 395
38 + __ = ___ + 38	

C. What do you notice about these problems? Write a conjecture about what you notice in your own words.

D. Write your conjecture as an equation (with variables). What do your variables represent?

E. Can you write your equation in a different way?

F. For what numbers is your conjecture true? Use numbers, cubes, pictures, or words to explain your thinking.

G. Find the following. Think about how you might use the properties you have learned in Lessons 3 and 4.

95 + 39 – 39 + 12   68 + 27 + 32 – 27

Review and Discuss

1. Is 23 + 17 = 17 + 23 true or false? What is a different way you can write this equation, using only these numbers, so that the equation is still true?

2. ___ + 0 = 0 + ____. What numbers will make this equation true?

3. Kara said that you could use any number in (2) and that she could represent ‘‘any number’’ with a variable. She represented this idea in the following way: b + 0 = 0 + b. Marcus agreed but wrote c + 0 = 0 + b. Do you agree with how Marcus represented the idea? Explain.

Results show that during Grade 3, treatment students, including those in at-risk settings, improved at a significantly faster rate than control students on both outcome measures and maintained their advantage throughout the intervention. Grade 3 students were particularly skillful in using algebraic strategies to solve tasks when compared with students receiving regular arithmetic instruction. The article thus concludes that interventions such as the one described here are effective to prepare students for algebra in later years, therefore smoothing their transition to secondary school.

Britt, M., Irwin, K. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. In J. Cai, E. Knuth (Eds.) *Early Algebraization.* Advances in Mathematics Education. Springer. 137-159.

Dans cet article, les auteurs s'appuient sur un programme de mathématiques introduit dans certaines écoles néo-zélandaises en 1999 - The New Zealand Numeracy Project - qui encourage la pensée algébrique en arithmétique. Dans ce programme, des éléments de pensée algébrique ont été introduits afin de faciliter la transition des étudiants vers les années intermédiaires (collège). Dans l'article, les auteurs expliquent le programme, donnent un exemple de tâche, puis discutent de la façon dont une telle activité peut aider au développement de la pensée algébrique.

Les élèves doivent utiliser les dizaines d'images (voir l'image ci-dessous) pour élaborer une stratégie de non-comptage judicieuse permettant de calculer 9 + 4.

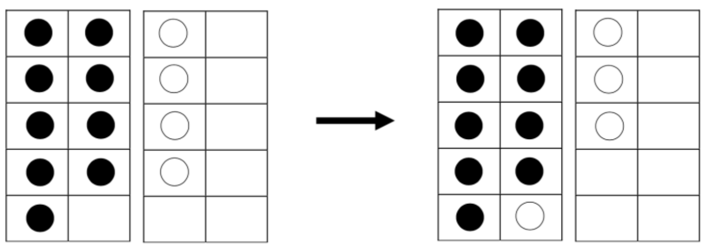


Figure 1a. Figure 1b.

L'enseignant commence par demander à l'élève de placer des marqueurs sur une image en dizaines pour afficher 9, puis 4 autres sur une autre image en dizaines pour afficher 4. 3 menant ainsi à la reconnaissance de 13 comme réponse. L'étudiante a également invité les élèves à utiliser les dizaines d'images pour trouver la solution à plusieurs tâches similaires, 8 + 5, 7 + 6 et 9 + 7, avant de demander à son enseignant de déterminer si elle pourrait résoudre 19 + 4, 27 +6, et 38 + 7 sans recours aux dizaines. Elle pourrait utiliser les dizaines d'images si elle ne savait pas quoi faire. Son professeur pourrait lui demander d'expliquer sa pensée après chaque réponse. La structure ou la généralisation sous-jacente peut être représentée algébriquement par $a + b = (a + c) + (b - c)$.

Il existe plusieurs aspects associés à la réflexion des étudiants qui justifient une analyse plus approfondie. Tout d'abord, ils font valoir que l'étudiante s'appuie sur ses connaissances antérieures des nombres pour former des images familières. Deuxièmement, l'élève reconnaît le modèle de formation d'images et commence à utiliser ces images pour résoudre des problèmes plus complexes, tels que 19 + 4 ou 27 + 6. De plus, il est également probable que l'élève a commencé à isoler les caractéristiques communes à chaque tâche, donc utiliser des chiffres et des mots pour justifier la généralité des transformations qui se produisent.

Les résultats montrent que lors d'un test axé sur la structure algébrique des tâches arithmétiques, les étudiants qui avaient été inclus dans le nouveau programme à ses débuts surpassaient ceux qui avaient reçu un programme traditionnel. De plus, une cohorte d'étudiants ayant bénéficié du nouveau programme a continué à obtenir de meilleures performances jusqu'à la fin de leurs études intermédiaires, ce qui montre que les résultats ont un impact à long terme.

Cette approche peut être utilisée en classe avec beaucoup de flexibilité. En général, les élèves vont utiliser les images et noter les modèles et les généralisations. L'enseignant peut ainsi consacrer un peu de temps à la discussion sur les modèles qui se dégagent avant de passer à des tâches plus complexes. C'est également un bon moyen de générer différentes stratégies de résolution de problèmes plutôt que de compter à chaque fois.

Britt, M., Irwin, K. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. In J. Cai, E. Knuth (Eds.) *Early Algebraization.* Advances in Mathematics Education. Springer. 137-159.

In this article, the authors draw upon a mathematics program introduced in some New Zealand schools in 1999 – The New Zealand Numeracy Project – that encourages algebraic thinking within arithmetic. In this program, elements of algebraic thinking have been introduced in order to facilitate students' transition to the intermediate years (middle school). In the article, the authors explain the curriculum, provide one example of task, and then discuss how such activity can help the development of algebraic thinking.

The task require student to use the tens-frames (see image below) to help devise a sensible non-counting strategy to work out 9 + 4.

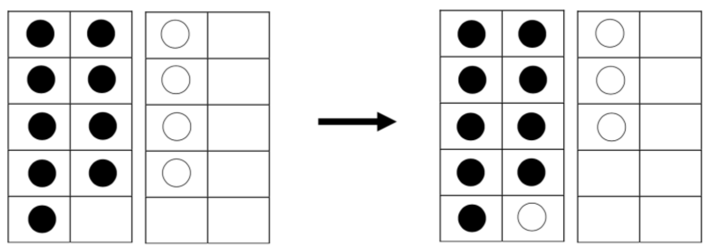


Figure 1a. Figure 1b.

The teacher starts by asking the student to put counters on a tens-frame to show 9 and then a further 4 counters on another tens-frame to show 4. Figure 1b shows the outcome of the student's actions that transform 9 + 4 into 10 + 3 so leading to her recognition of 13 as the answer. The student further invited to use the tens-frames to figure out the solution to several similar tasks, 8 + 5, 7 + 6, and 9 + 7 before being challenged by her teacher to see if she could work out 19+4, 27+6, and 38+7 without recourse to the tens-frames. She could revert to using the tens-frames if she was unsure what to do. She might be asked by her teacher to explain her thinking after each response. The underlying structure or generalization may be represented algebraically as $a + b = (a + c) + (b - c)$.

There are several aspects associated with student thinking that warrant further analysis. Firstly, they argue that the student builds on her prior knowledge of numbers to form familiar images. Secondly, the student recognizes the pattern of forming images and starts using these images to solve more complex problems, such as 19 + 4 or 27 + 6. Further, the student is also likely to have begun to isolate the features common to each task, therefore using numbers and words to justify the generality of the transformations that take place.

Results show that on a test focused on algebraic structure of arithmetic tasks, those students who had been included in the new program in its early stages out- performed those who had received a traditional program. Additionally, a cohort of students who received the new program continued having higher performance through their intermediate grades, showing that the results have a long-standing impact.

This approach can be used in class with a lot of flexibility. Students will generally transition back and forth between using the images and noticing patterns and generalizations, so the teacher can spend some time to discuss the patterns that emerge before moving to tasks that are more complex. It is also a good way to generate different problem solving strategies rather than counting every time.

Cai, J., Fung Ng, S., & Moyer, J.C. (2011). Developing students' algebraic thinking in earlier grades: Lessons from China and Singapore. In J. Cai, & E. Knut (Eds). *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives-Advances in Mathematics Education* (pp. 25-41). Heidelberg: Springer.

Dans cet article, les auteurs ont tenté de faire la lumière sur la façon dont les programmes d'études chinois et singapouriens ont été introduits et proposent de développer une pensée relationnelle et algébrique chez les élèves du primaire. Les programmes des deux pays visaient explicitement à améliorer la réflexion des élèves du primaire sur les relations quantitatives.

Le programme d'études chinois adopte une approche à un problème - plusieurs solutions et attend des étudiants qu'ils représentent les relations quantitatives sous forme numérique et symbolique. Exemple de problème et ses représentations: Xiao Qing a acheté deux batteries. Elle a donné 6 Yuans à la caissière et a rendu 4 Yuans en monnaie. Combien coûte chaque batterie? (p. 29)

Le montant d'argent versé au caissier - le coût des deux piles = le changement.

Le coût des deux batteries + le changement = la somme versée au caissier.

Le montant d'argent versé au caissier - le changement = le coût des deux batteries.

6-4 = ?; 4 +? = 6; 6 -? = 4;

En 1ère à 4ème année, les élèves apprennent à formuler et à résoudre des équations simples et en 5ème année, les équations sont formellement introduites. À partir de ce moment, les élèves utilisent ces connaissances pour étudier d'autres parties des mathématiques, telles que les fractions, les pourcentages, les statistiques et le raisonnement proportionnel, au cours de la seconde moitié des 5e et 6e années.

En 6e année, les élèves sont encouragés à résoudre le problème suivant de quatre manières différentes: Une usine a modifié ses procédures de production. Après cela, le coût de fabrication d'un produit était de 37,40 Yuans, soit 15% de moins que le coût avant modification des procédures de production. Quel était le coût de fabrication du même produit avant la modification des procédures de production?

Les concepts de fonction et de variable ne sont pas introduits formellement, mais ces idées imprègnent les péchés du curriculum chinois de la 1re année et sont implicitement utilisées dans diverses tâches et représentations.

Programme singapourien, promouvoir le développement progressif de la pensée abstraite grâce à l'utilisation de « méthodes modèles » ou « équations imagées ». Dans les premières années, les images servent à modéliser les problèmes. Plus tard, ces images sont remplacées par des rectangles représentant des quantités et des relations entre eux. Cette heuristique est conçue comme un outil pour résoudre des problèmes arithmétiques et algébriques. La complexité des modèles (schémas) augmente parallèlement à la complexité des problèmes de mots résolus par les élèves. En résumé, les enfants résolvent les problèmes de mots en utilisant la « méthode du modèle » pour construire des équations imagées qui représentent toutes les informations contenues dans les problèmes de mots sous forme d'un ensemble cohérent, plutôt que sous forme de parties distinctes. Pour résoudre l'équation imagée, les élèves trouvent les opérations décrites par le schéma et les annulent. Cette approche aide les étudiants à approfondir leurs connaissances sur les propriétés des opérations.

La deuxième grande idée explorée par le programme d'études de Singapour est l'étude des modèles visuels et numériques. D'autres aspects importants sont « faire et défaire », construire des règles pour représenter les fonctions et aussi s'abstraire du calcul.

Les recherches montrent clairement que les étudiants chinois et singapouriens du primaire sont capables d’utiliser des approches algébriques pour résoudre des problèmes.

Cai, J., Fung Ng, S., & Moyer, J.C. (2011). Developing students' algebraic thinking in earlier grades: Lessons from China and Singapore. In J. Cai, & E. Knut (Eds). ***Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives-Advances in Mathematics Education*** **(pp. 25-41). Heidelberg: Springer.**

In this paper, authors tried to shed light on the way Chinese and Singaporean curricula introduced and proposes to develop relational and algebraic thinking in elementary school students. Both country's curricula explicitly aimed at improving elementary students' thinking about quantitative relationships.

The Chinese curriculum adopts a one problem – multiple solution approach and expects students to represent quantitative relationships numerically and symbolically. Example of a problème and its representations: *Xiao Qing purchased two batteries. She gave the cashier 6 Yuans and got 4 Yuans in change back. How much does each battery cost?* (p. 29)

The amount of money paid to the cashier − the cost of the two batteries = the change.
The cost of the two batteries + the change = the amount of money paid to the cashier.
The amount of money paid to the cashier − the change = the cost of the two batteries.
6-4=?; 4+?=6; 6-?=4;

In grades 1 to 4, students learn to formulate and solve simple equations and at grade 5 the equations are formally introduced. From this point on, the students use this knowledge to study other parts of mathematics, such as fractions, percents, statistics, and proportional reasoning, in the second half of grade 5 and grade 6.

In Grade 6, students are encouraged to solve the following problem in four different ways: *A factory changed its production procedures. After that, the cost of making one product was 37.40 Yuans which is 15% lower than the cost before the production procedures were changed. What was the cost of making the same product before the production procedures were changed?*

The concepts of function and variable are not formally introduced but these ideas permeate the Chinese curriculum sins grade 1 and they are implicitly used in various tasks and representations.

Singaporean curriculum, promote the gradual development of abstract thinking trough the use of "model methods" or "pictorial equations". In early grades, pictures are used to make a model the problems. Later, these pictures are replaced by rectangles representing quantities and relations among them. This heuristic is intended as a tool for solving arithmetic and algebraic problems. The complexity of the models (schemas) grow together with the complexity of word problems students solve. In summary, children solve word problems using the "model method" to construct pictorial equations that represent all the information in word problems as a cohesive whole, rather than as distinct parts. To solve the pictorial equation, students find operations described by the schema and undo them. This approach helps students to deepen their knowledge bout properties of operations.

The second big idea explored by the Singaporean curriculum is the study of visual and numerical patterns. Other important aspects are "doing and undoing", building rules to represent functions, and also abstracting from computation.

The research clearly shows that elementary Chinese and Singaporean students are capable of using algebraic approaches to solve problems.

Carpenter et al. (2005). Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking, *ZDM, 37*(1), 53-59.

Carpenter et ses collaborateurs (2005) ont réalisé des analyses qualitatives à partir de problèmes arithmétiques avec 2 élèves de 3e année primaire (8-9 ans). Ils ont utilisé la technique pédagogique d'étayage (scaffolding) en posant des problèmes que l'élève ne pouvait les résoudre immédiatement, en le guidant et en le questionnant (il s'agit de questionnement souvent général, en fonction du besoin de l'élève) pour l'amener à comprendre le concept de distributivité. L'objectif didactique des activités concerne le développement de la pensée relationnelle pour apprendre l'arithmétique permettant de faciliter l'apprentissage de l'algèbre à l'école secondaire.

Les aspects importants de la mise en œuvre en classe par l'enseignant sont les suivants : 1) dans un problème arithmétique pour lequel l'élève ne se rappelle pas comment procéder, il faut qu'il ait **besoin** de stratégies pour trouver une solution; 2) le problème doit inclure, entre autres, des éléments que l'élève connaît et qu'il peut exploiter dans sa stratégie; 3) modifier le problème avec des plus grands nombres pour solliciter la généralisation. En outre, l'enseignant doit faire verbaliser l'élève afin de connaître son processus de résolution et pour développer son habilité de communication mathématique.

Exemple : problème posé à l'élève Kelly : $(7 \times 156) + (9 \times 156) = (j \times 156)$. Que faut-il faire pour déterminer la valeur de j ?

Dans ces problèmes, le langage mathématique introduit (une lettre signifiant un nombre inconnu) est approprié puisque cette écriture est authentique dans la culture mathématique.

Les activités des auteurs aident les élèves à développer leur capacité d'apprentissage par l'usage de la communication (comme outil de raisonnement), plus spécifiquement à travers les échanges suscités par l'enseignante, c'est-à-dire par la verbalisation et la réflexion à voix haute avec les élèves. Voici un exemple entre l'enseignante (Mme L) et un élève (Kelly) :

Mme L: « Que diriez-vous de ceci, 3X7 = 14 + 7, est-ce vrai ou faux »? p. 55

Kelly: « C'est vrai ». p.55

Mme L: « Wow, c'était rapide, comment savez-vous que c'est vrai »? p.55

Kelly: « Pouvons-nous remonter ici [en pointant 3X7 = 7 + 7 + 7] »? p. 55

Mme L: « Bien sûr ». p. 55

Kelly: « Sept et sept c'est 14, c'est ici [tracer une ligne reliant deux 7 dans la phrase du premier chiffre et écrire 14 en dessous]. Quatorze sont allés directement ici [pointant le 14 dans la phrase du deuxième numéro]. Ensuite, il en reste un qui pointe vers le troisième 7 dans la première phrase numérotée], et qui est allé ici [en montrant le dernier 7 dans la deuxième phrase numérotée] ». p. 55

Kelly a utilisé la pensée relationnelle pour raisonner sur ce problème.

Les activités proposées par les auteurs peuvent être adaptées aux différents besoins des groupes d'élèves selon 2 aspects : 1) choisir des propriétés des opérations différentes (ex. commutativité); 2) adapter les valeurs des nombres (en respectant les connaissances antérieures des élèves).

Les activités de Carpenter et ses collaborateurs (2005) permettent d'éviter des obstacles à l'apprentissage de l'arithmétique puisque les élèves qui s'engagent dans une pensée relationnelle utilisent un ensemble de principes fondamentaux des mathématiques pour établir des relations et développer des stratégies. La pensée relationnelle constitue un moyen de saisir les relations (connections) productives pour apprendre avec compréhension.

Carpenter et al. (2005). Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking, *ZDM*, *37*(1), 53-59.

Carpenter et al. (2005) conducted qualitative analyzes of arithmetic problems with 2 grade 3 students (8-9 years). They used the pedagogical step technique (posing) of problems that were solved immediately. student) to bring to understand the concept of distributive law. The didactic goal of the development of relational thinking to learn arithmetic, to facilitate the learning of algebra in high school.

Important aspects of classroom implementation are the following: 1) in arithmetic problem for the raises to be a how, one needs strategies to find a solution; 2) the problem must include, among the other elements, the student knows and can exploit in his strategy; 3) modify the problem with large numbers to solicit generalization. In addition, the teacher must verbalize the student in order to know his process of resolution and to develop his skill of mathematical communication.

<u>Example</u>: problem with student Kelly: (7 × 156) + (9 × 156) = (j × 156). What does it take to determine the value of j?

In these problems, the mathematical language introduced (one-sign-not-number-number) is appropriate of this writing is authentic in mathematical culture.

The activities of author authors to develop their ability to learn by using communication (as a reasoning tool), as well as to be exchanged between the teacher, that is to say, by verbalization and reflection aloud with the students. Here is an example between the teacher (Ms. L) and a student (Kelly):

Ms L: "How about this, 3X7 = 14 + 7, is this true or false? p. 55

Kelly: "That's right."

Ms. L: "Wow, it was fast, how do you know it's true"? p.55

Kelly: "Can we go back here [pointing 3X7 = 7 + 7 + 7]"? p. 55

Ms. L: "Of course". p. 55

Kelly: "Seven and seven is 14, it's here [Draw a line connecting two sentences in the first digit and write 14]. Fourteen went directly here. Then, he stays in a point towards the third 7 in the first sentence numbered], and he has already gone here [in the last sentence numbered] ". p. 55

Kelly used relational thinking to explain this problem.

The activities proposed by the different authors can be adapted according to the needs of the groups of students according to two aspects: 1) to choose the properties of the different operations (e.g. Commutativity); 2) adapt the values of the numbers.

The activities of Carpenter and his collaborators (2005) range from the obstacle to learning arithmetic to the student who clings to relational thinking to a set of fundamental principles of mathematics to develop and develop relationships strategies. Relational thinking is a means of grasping (connections) relationships to learn with understanding.

Carraher, D. W., Martinez, M.V, & Schliemann, A.D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*. *40*(1), 3–22. DOI 10.1007/s11858-007-0067-7

Carpenter et ses collaborateurs (2008) analysent des données qualitatives tirées de cours avec des élèves de troisième année (8 à 9 ans) apprenant à généraliser des relations fonctionnelles dans le contexte de schémas de croissance visuels (figurés). Les tâches relatives aux tables individuelles et aux tables jointes (voir les figures 2 et 1 respectivement) sont basées sur une situation de tous les jours décrivant la disposition des tables dans un restaurant. Les étudiants doivent d'abord résoudre les tâches informatiques, puis seulement la tâche JT. Pour chaque type d'arrangement, les élèves doivent déterminer le nombre maximum de personnes pouvant être assises pour plusieurs tables. Au début, pour les deux tâches, l'enseignant invite les élèves à réfléchir à ce qui se passe lorsqu'un tableau est ajouté à l'arrangement (tableau individuel ou joint à la ligne de tableaux). Combien de sièges supplémentaires cette opération crée. Cependant, la question ultime de chaque tâche est la suivante: « Si je vous dis le nombre de tables à dîner, comment pouvez-vous déterminer le nombre maximum de personnes qui peuvent s'asseoir? » (P. 10). Ou « Si je vous dis le nombre de sièges, comment pouvez-vous calculer le nombre de tableaux? » Ces deux questions sont importantes pour solliciter la pensée relationnelle et fonctionnelle des étudiants.

Pour faciliter la réflexion des élèves, l'enseignant fournit un tableau où l'information sur les tableaux, leur disposition et le nombre de places assises peut être représentée. Pour aider les élèves à abandonner les calculs itératifs et à généraliser leur compréhension en tant que relation fonctionnelle, l'enseignant a proposé, à un moment donné, de réfléchir à un grand nombre de sièges ou de tables (par exemple, combien de tables pour 100 tâches 100 tables dans la tâche JT). L'enseignant invite également régulièrement les élèves à comprendre les nombres qu'ils calculent dans le contexte des tâches.

Les chercheurs ont rapporté que les étudiants utilisaient différentes méthodes pour décrire les relations fonctionnelles entre le nombre de tables (T) et le nombre de places assises (S) (S = 4xT et S = 2T + 2). Certains élèves peuvent effectuer des calculs appropriés (selon la formule), mais ont du mal à les formuler oralement ou mathématiquement. Lors d'une discussion, l'enseignant a aidé les élèves à exprimer leurs stratégies sous forme de formules mathématiques.

Les chercheurs soutiennent que les jeunes étudiants sont capables d'une pensée fonctionnelle simple s'ils se voient confier une tâche significative et s'ils sont correctement guidés par l'enseignant. Ils soulignent également le rôle important de la représentation visuelle du motif permettant l'analyse visuelle et la création de sens.

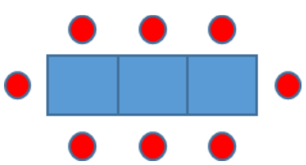


Figure 1 arrangement de la table commune

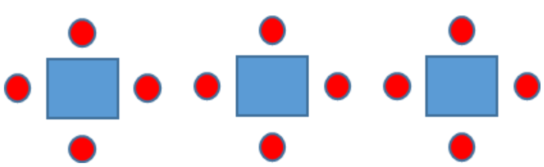


Figure 2 Disposition des tables individuelles

Carraher, D. W., Martinez, M.V, & Schliemann, A.D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*. *40*(1), 3–22. DOI 10.1007/s11858-007-0067-7

Carpenter and colleagues (2008) analyze qualitative data from lessons with grade three (8-9 years old) students learning to generalize functional relationships in the context of a visual (figural) growing patterns. The Individual Tables and the Joined Tables tasks (see Figure 2 and 1 respectively) are based upon an everyday situation describing table arrangements in a restaurant. Students first solve the IT tasks and only then, they solve the JT task. For each arrangement type, students should figure out the maximum number of people that can be seat for a number of tables. For both tasks, at the beginning, the teacher invites students to think about what happens when one table is added to the arrangement (individual table or a table joint to the line of tables). How many more sits this operation creates. However, the ultimate question of each task is “If I tell you the number of dinner tables, how can you figure out the maximum number of people that can sit down?” (p. 10). Or “If I tell you the number of sits, how can you figure out how many tables are there?” These two questions are important to solicit students’ relational and functional thinking.

To support students’ reflection, teacher provide a table, where the information about tables, their arrangement and the number of sits can be represented. To help students abandon iterative calculations and generalize their understanding as a functional relationship, teacher proposed, at some point, to think about a big number of sits or tables (e.g. how many tables for 100 sits for the IT task, or how many sits for 100 tables in the JT task). Teacher also regularly invited students to make sense of numbers they calculate within the tasks’ context.

Researchers report that students used various ways to describe the functional relationships between the number of tables (T) and the number of sits (S) (S=4xT and S=2T+2). Some students could produce appropriate calculations (according to the formula), but have difficulties to formulate it orally or mathematically as an expression. Teacher, through a discussion, helped students to express their strategies as mathematical formulas.

Researchers argue that young students are capable of simple functional thinking if presented with a meaningful task and properly guided by the teacher. They also highlight the important role of the visual representation of the pattern allowing for the visual analysis and sense making.

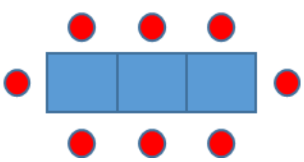


Figure 1 Joint Table arrangement

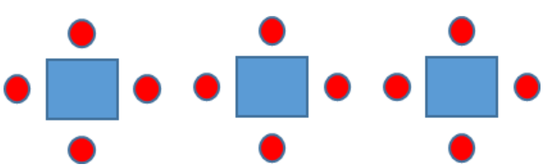


Figure 2 Individual Tables arrangement

Brizuela, B., &; Schliemann, A. (2004). Ten-years-old students solving linear equations. For the Learning of Mathematics, 24(2), 33-40.

Cette étude visait à repenser la perspective des difficultés des étudiants en algèbre. Les auteurs ont fait valoir qu'en utilisant des notations algébriques nouvelles et modernes, par exemple: tables de fonctions et graphiques de coordonnées cartésiennes, les étudiants pourraient être mieux préparés à travailler avec des règles syntaxiques. Ils rendent compte des résultats obtenus en travaillant avec un groupe d'élèves de dix ans qui « ont résolu des équations linéaires avec des inconnues et des variables des deux côtés du signe égal, un résultat qui aurait été hors de portée pour de nombreux élèves de moyenne et grande taille. Les élèves du secondaire. »

Les auteurs utilisent un sens plus large du concept de raisonnement algébrique dans lequel ce concept est associé et intégré dans de nombreux systèmes de représentation différents, plutôt que seulement avec la notation algébrique-symbolique. Ils font valoir que si les notations conventionnelles sont introduites de manière inappropriée aux étudiants afin qu'ils ne puissent pas les comprendre, ils peuvent les formaliser de manière incorrecte et avoir des difficultés pour les utiliser ultérieurement. Leur approche repose sur l'introduction de nouvelles notations en tant que variations des manières spontanées des étudiants de communiquer des problèmes verbaux ouverts. Ils montrent que les jeunes étudiants peuvent apprendre à utiliser la notation algébrique-symbolique de manière significative pour exprimer des généralisations auxquelles ils sont parvenus tout en explorant des problèmes dans des contextes riches et ouverts. L'auteur suggère également que les enfants puissent utiliser des notations mathématiques non seulement pour exprimer leur pensée, mais aussi pour la structurer afin de faire des déductions qu'ils n'auraient peut-être pas faites autrement.

Les chercheurs ont travaillé avec 70 élèves dans quatre salles de classe, de la 2e année (enfants de 7 à 8 ans) à 4 ans (enfants de 9 à 10 ans). Les étudiants appartenaient à une communauté multiethnique (75% de Latino) dans la région métropolitaine de Boston et 83,09% des étudiants de l'école suivaient le programme de repas gratuits ou à repas réduit. Les activités liées aux opérations arithmétiques, aux fractions, au ratio, à la proportion et aux nombres négatifs. Chaque leçon a été consacrée à un problème comportant des quantités inconnues et pouvant être représenté avec des équations. Exemple de problème:

Mike et Robin ont chacun de l'argent. Mike a 8 $ en main et le reste de son argent est dans son portefeuille. En tout, Robin a exactement trois fois plus d'argent que Mike dans son portefeuille. Combien d'argent pourrait-il y avoir dans le portefeuille de Mike? Qui a plus d'argent? (p. 35)

Lorsque le problème a été présenté, l'enseignant n'a pas cherché à trouver une « bonne » réponse, mais à examiner toutes les possibilités, à tracer les graphiques de deux fonctions et à n'envisager une réponse qu'après que les élèves eurent franchi ces étapes.

Chaque leçon a commencé par jouer le problème. L'enseignant a encouragé les élèves à utiliser deux types de stratégies différents pour traiter des problèmes algébriques. La première concernait le « rapprochement » des montants des deux côtés d'un signe égal, ou le rapprochement de montants appartenant à deux personnes différentes, telles que Mike et Robin. La deuxième stratégie consistait à annuler des montants égaux des deux côtés d'un signe égal ou des montants appartenant à deux personnes différentes. En utilisant ces deux stratégies, les élèves pouvaient toujours aborder les problèmes de différentes manières.

Les auteurs concluent que c'est très probablement le type d'instruction auquel les élèves sont exposés qui a le plus d'impact sur leurs performances en algèbre. Si les élèves étaient exposés à un programme de mathématiques algébrafié dès le début de leurs études, il est probable qu'à l'âge de leur adolescence, ils seraient en mesure de traiter des mathématiques beaucoup plus complexes.

Brizuela, B., &; Schliemann, A. (2004). Ten-years-old students solving linear equations. For the Learning of Mathematics, 24(2), 33-40.

This study aimed at re-conceptualizing the perspective concerning students' difficulties with algebra. Authors argued that by using new and modern algebraic notations, e.g. function tables and Cartesian coordinate graphs, students could be better prepared to work with syntactical rules. They report on results obtained by working with a group of ten-year-old students who "solved linear equations with unknowns and variables on both sides of the equal sign, an achievement that has been thought to be out of reach for many middle- and high-school students."

The authors use a broader sense of the concept of algebraic reasoning in which this concept is associated with and embedded in many different representational systems, rather than only with algebra-symbolic notation. They argue that if conventional notations are introduced to students inappropriately so that they can't make sense of them, students may formalize them incorrectly and have difficulties in their further use. Their approach relies on introducing new notations as variations of students' spontaneous ways of communicating open-ended verbal problems. They show that young students can learn to use algebra-symbolic notation meaningfully to express generalizations they have reached while exploring problems in open-ended rich contexts. Author also suggest that children can use mathematical notations not only to register their thinking, but also to structure it in order to make inferences they might otherwise not have made.

Researchers worked with 70 students in four classrooms, from grades 2 (children between 7 and 8 years of age) to 4 (children between 9 and 10 years of age). Students were from a multiethnic community (75% Latino) in Greater Boston, and 83.09% of the students in the school were on the free or reduced meal program. The activities related to arithmetic operations, fractions, ratio, proportion, and negative numbers. Each lesson focused on a problem that had unknown amounts in it and that could be represented with equations. Example of problem:

Mike and Robin each has some money. Mike has $8 in his hand and the rest of his money is in his wallet. Robin altogether has exactly three times as much money as Mike has in his wallet. How much money could there be in Mike's wallet? Who has more money? (p. 35)

When presented the problem, the teacher did not not aske to find a 'right' answer, but to consider all possibilities, to draw the graphs of two functions, and to consider an answer only after students had gone through these steps.

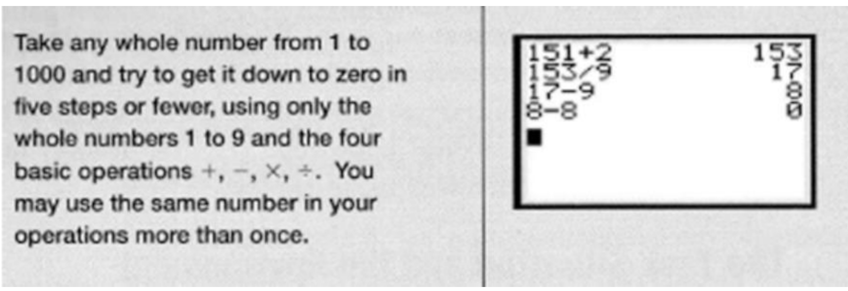
Each lesson started with *acting out* the problem. Teacher encouraged students to use two different kinds of strategies when dealing with algebraic problems. The *first* had to do with 'matching up' amounts on both sides of an equal sign, or matching up amounts belonging to two different people, such as Mike and Robin. The second strategy had to do with canceling out equal amounts on both sides of an equal sign or amounts belonging to two different people. Using these two strategies, students still could approach problems in different ways.

The authors conclude that it is most likely the type of instruction that the students are exposed to that have the most impact on their performance in algebra. If students were exposed to an algebrafied mathematics curriculum from the onset of their education, it is likely that by the time they are adolescents, they would be able to deal with a lot more complex mathematics.

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. In C. Kieran (ed.) *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds, ICME-13 Monographs, 34,* 79-105.

Dans cet article, l'auteur propose d'examiner comment les élèves s'engagent dans des activités mathématiques pour rechercher des structures en recomposant des modèles dans des tâches arithmétiques. L'analyse était basée sur un exemple d'élèves de 12 ans engagés dans une activité comportant des nombres et des opérations numériques. L'étude comprenait trois classes dans un environnement de calculatrice basé sur les tâches et portait sur la manière dont elles cherchaient, utilisaient et exprimaient des structures liées à la multiplication, à la division, à des facteurs, à des multiples et à des diviseurs.

L'activité s'appelait « Cinq étapes à zéro » et consistait à utiliser les quatre opérations pour ramener à zéro tout nombre compris entre 1 et 1 000 en cinq étapes. Notez que tous les nombres entiers de 1 à 1000, à l'exception de 851 et 853, qui nécessitent six étapes, peuvent être ramenés à zéro en cinq étapes ou moins.



L'auteur a développé une série de dix tâches comportant des tâches basées sur cette activité et les étudiants ont travaillé pendant une semaine (cinq séances de cinquante minutes chacune). Lorsque les élèves ont fini une feuille d'activité et l'ont remise, on leur a donné la suivante. Certaines des tâches comprennent les suivantes:

1. Prends le nombre 144. Écris le plus grand nombre de manières possible pour ramener 144 à zéro, en utilisant le moins d'étapes possible.

2. Prends le nombre 151. Écris le plus grand nombre de manières possible pour ramener 151 à zéro, en utilisant le moins d'étapes possible.

3. Prenez le numéro 732. Écrivez autant de façons que vous le souhaitez pour ramener 732 à zéro, en utilisant le moins d'étapes possible.

4. Décrivez vos stratégies pour minimiser le nombre d'étapes.

5. Voici une solution proposée par un élève pour amener 432 à zéro: 432/2 = 216; 216/2 = 108; 108/2 = 54; 54/3 = 18; 18/3 = 6; 6 - 6 = 0. Montrer un moyen de ramener 432 à zéro en moins d'étapes. Explique ta stratégie. Pensez-vous que cela fonctionnera toujours? Pourquoi?

Les enseignants ont présenté la situation de la tâche principale comme suit. Ils ont commencé par l'exemple de 360 et illustré par l'écran de visualisation de la classe (une projection de la taille de la pièce de l'écran de la calculatrice reliée au dispositif de l'écran de visualisation) qu'ils pouvaient atteindre à zéro de la manière suivante: 360/2, 180/2, 90/3, 30/6, 5 - 5. Les enseignants ont ensuite invité des volontaires à se présenter pour leur montrer comment atteindre zéro en moins de cinq étapes. Après cela, les étudiants ont été invités à suggérer leur propre nombre de départ, supérieur à 200, par exemple, que d'autres étudiants ont proposé de résoudre. Les élèves ont ensuite commencé à travailler sur les tâches des fiches d'activité, individuellement ou à deux, mais chaque élève a rempli ses propres fiches d'activité.

Au cours de la semaine qui a suivi la partie de l'étude en classe, quatre étudiants aux aptitudes mathématiques distinctes ont été interrogés individuellement. Un pré-test avait également été donné aux étudiants avant l'étude pour vérifier leurs connaissances des diviseurs, des multiples et des nombres premiers. Les entretiens, ainsi que les résultats du pré-test, ont permis à l'auteur d'explorer de plus près la nature de la prise de conscience structurelle développée par les étudiants au cours de la semaine précédente.

Les propriétés structurelles explicitement indiquées dans les travaux des étudiants sont les suivantes:

• Si un nombre a à la fois des diviseurs a et b, il est également divisible par un x b.

• Lorsque deux multiples adjacents d'un nombre n sont divisés par n, les deux quotients obtenus sont consécutifs (par exemple, “738 et 729 sont deux multiples adjacents de 9; quand ils sont tous deux divisés par 9, les quotients sont les numéros 82 et 81 ”).

• Dans chaque intervalle de n nombres, il y a exactement un nombre divisible par n (par exemple, « Dans l'intervalle de 9 chiffres compris entre 735 et 743 inclus, il y a exactement un nombre divisible par 9 »).

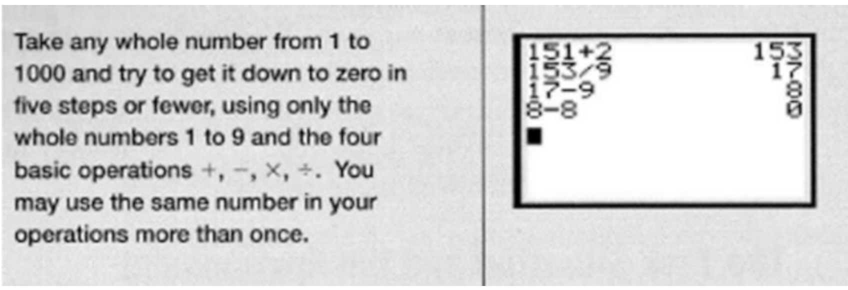
• Si l'ajout de n à un nombre x génère un multiple de m, la soustraction de m - n le sera également (par exemple, « Si l'ajout de 1 à 989 génère un multiple de 9, la soustraction de 8 entraîne également la soustraction de 8. 9 entre les deux chiffres ajustés 990 et 981 »).

Les stratégies de résolution des élèves ont évolué, passant d'essais et d'erreur à une structuration plus réfléchie en fonction du réseau de relations entre multiplication et division. L'auteur considère cette activité comme un moyen fondamental de développer la pensée algébrique précoce des étudiants. Elle soutient que l'algèbre du lycée nécessite la capacité de voir la structure dans des formes généralisées. Des chercheurs en algèbre ont expliqué que les difficultés des étudiants en matière de structure algébrique sont en partie dues à leur manque de compréhension des notions structurelles en arithmétique, activité qui peut aider à résoudre ce problème.

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. In C. Kieran (ed.) *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds, ICME-13 Monographs, 34,* 79-105.

In this article, the author proposes to investigate how students engage with mathematical activities to seek structures by recomposing patterns in arithmetic tasks. The analysis was based on an example of 12-year-old students engaged in an activity with numbers and numerical operations. The study involved three classes in a task-based calculator environment and focused on the ways in which they sought, used, and expressed structures related to multiplication, division, factors, multiples, and divisors.

The activity was called "Five Steps to Zero" and consisted in using the four operations to bring down to zero any number from 1 to 1000 under five steps. Note that all whole numbers from 1 to 1000, with the exception of 851 and 853, which require six steps, can be brought down to zero in five or fewer steps.



The author developed a set of ten tasks involving tasks based on this activity and students worked over a period of one week (five classes of fifty minutes each). When students finished one activity sheet and handed it in, they were given the next one. Some of the tasks include the following:

1. Take the number 144. Write as many ways as you can for bringing 144 to zero, using as few steps as possible.

2. Take the number 151. Write as many ways as you can for bringing 151 to zero, using as few steps as possible.

3. Take the number 732. Write as many ways as you can for bringing 732 to zero, using as few steps as possible.

4. Describe your strategies for minimizing the number of steps.

5. Here is a solution proposed by a pupil for bringing 432 to zero: 432/2 = 216; 216/2 = 108; 108/2 = 54; 54/3 = 18; 18/3 = 6; 6 – 6 = 0. Show a way of bringing 432 to zero in fewer steps. Explain your strategy. Do you think it will always work? Why?

The teachers introduced the main task situation as follows. They began with the example of 360 and illustrated with the classroom view-screen (a room-size projection of the screen of the calculator that was hooked up to the view-screen device) that they could get down to zero in the following way: 360/2, 180/2, 90/3, 30/6, 5 − 5. The teachers then requested volunteers to come forward to show how they might get to zero in fewer than five steps. After that, students were asked to suggest their own starting numbers, say, larger than 200, which other students came forward to solve. The students then began to work on the tasks of the activity sheets, either individually or in pairs, but each student filled in his/her own activity sheets.

During the week that followed the classroom part of the study, four students of distinct mathematical abilities were individually interviewed. A pre-test had also been given to the students prior to the study to inquire into their knowledge of divisors, multiples, and primes. The interviews, in conjunction with the pre-test results, gave the author the opportunity to explore at closer range the nature of the structural awareness that students had developed over the course of the previous week.

Structural properties that were explicitly indicated in the students' work included the following:

• If a number has both a and b as divisors, then it is also divisible by a x b.

• When two adjacent multiples of a number n are divided by n, then the two quotients that are obtained are consecutive (e.g., "738 and 729 are two adjacent multiples of 9; when they are both divided by 9, the quotients are the consecutive numbers 82 and 81").

• Within every interval of n numbers, there is exactly one number divisible by n (e.g., "In the 9-number interval from 735 to 743 inclusive, there is exactly one number divisible by 9").

• If adding n to a number x yields a multiple of m, then so too will subtracting m − n (e.g., "If adding 1 to 989 yields a multiple of 9, then so too will subtracting 8, due to the resulting difference of 9 between the two adjusted numbers 990 and 981").

Students' solving strategies evolved from the use of trial and error to more deliberate structuring according to the network of relations between multiplication and division. The author considers this activity to be a fundamental path to developing students' early algebraic thinking. She argues that high school algebra requires the ability to see structure within generalized forms. Algebra researchers have argued that students' difficulties with algebraic structure are in part due to their lack of understanding of structural notions in arithmetic, and this activity can help tackle this issue.

Hunter, J., Anthony, G., Burghes, D. (2016). Scaffolding teacher practice to develop early algebraic reasoning. In C. Kieran (ed.) ***Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds, ICME-13 Monographs, 34,*** **379-401.**

Le but de l'activité était de créer une « atmosphère de conjecture » dans la classe de mathématiques. Les auteurs définissent une telle atmosphère comme une salle de classe où des opportunités viables de raisonnement algébrique se présentent, les étudiants émettent des conjectures, construisent des arguments mathématiques, justifient des idées, utilisent des preuves appropriées à leur âge et généralisent leurs idées. C'est sur ce type d'atmosphère en classe que les élèves peuvent développer une pensée algébrique et mieux se préparer à l'introduction ultérieure de l'algèbre formelle en mathématiques.

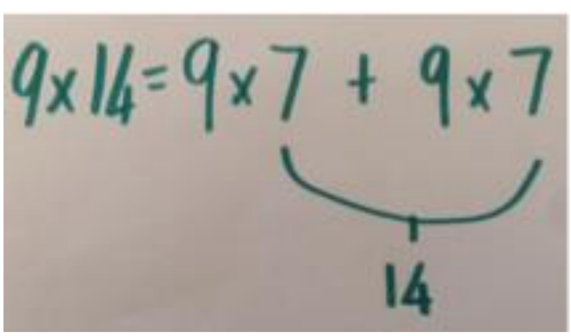
L'analyse était basée sur un projet de développement professionnel mis en œuvre par les auteurs. Une enseignante en particulier a eu des changements importants dans ses pratiques et les auteurs analysent ce qui a bien fonctionné dans sa classe. Trois aspects principaux de ses pratiques d'enseignement ont permis aux étudiants de conjecturer et de justifier leurs idées mathématiques.

Le premier aspect concerne les justifications. Pendant les cours, l'enseignant a maintenu l'espoir que les conjectures seraient exprimées et prouvées tout en facilitant une attente cohérente de généralisation. Elle a utilisé des questions telles que: cela fonctionnerait-il pour des nombres différents? Ou: puis-je changer cela en quelque chose qui fonctionnerait pour n'importe quel nombre?

Le deuxième aspect est que l'enseignante a constamment invité ses élèves à construire des généralisations en classe. Elle y parvint en notant les hypothèses émises par les élèves et en facilitant ensuite l'enquête de toute la classe. Cela impliquait de tester et de réviser la conjecture et de la développer en une généralisation.

Enfin, le troisième aspect des pratiques en classe était que les élèves justifiaient leurs conjectures en utilisant du matériel concret. Par exemple, un élève a émis une conjecture sur la division par un: c'est comme si vous obteniez un groupe et que vous le divisez par un groupe, c'est ce que vous avez déjà fait. Si vous avez un nombre et que vous le divisez par un, il finit par ce nombre. L'enseignant a ensuite demandé à l'élève de démontrer et de justifier cette idée à l'aide de matériel: Montrez ce que vous voulez dire par des jetons au tableau.

Les résultats montrent que les étudiants ont commencé à s'appuyer sur des généralisations et des conjectures antérieures pour expliquer leur propre raisonnement. Au fur et à mesure que les élèves de l'enseignant acquéraient de l'expérience en justification, ils ont de plus en plus recours à la documentation pour démontrer leur raisonnement. Par exemple, en utilisant une tâche impliquant la propriété distributive (par exemple, écrivez le bon signe pour 9 x 14 __ 9 x 7 + 9 x 7), l'enseignant a aidé les élèves à utiliser des représentations pour justifier leur raisonnement. S'appuyant sur des travaux antérieurs en classe portant sur la propriété distributive, de nombreux étudiants ont commencé à généraliser la propriété distributive pour résoudre les tâches.



Les élèves ont également modifié leur façon de participer aux activités en classe. Ils ont commencé à utiliser plus souvent des explications et des structures algébriques pour trouver des régularités et résoudre des tâches en classe. L'attention constante portée aux pratiques mathématiques de justification, de généralisation et de preuve a amené les étudiants à s'appuyer sur des conjectures et des généralisations déjà examinées dans leurs explications.

Cette approche peut s'appliquer non seulement au strict contexte de l'algèbre, mais elle englobe en réalité une manière différente de connaître et de faire des mathématiques. Les enseignants peuvent appuyer sur les réponses des élèves et les utiliser pour générer des discussions productives. Cela engage non seulement les élèves dans des tâches plus exigeantes sur le plan cognitif, mais les rend également plus conscients de l'ensemble du processus d'apprentissage (ils ne se concentrent pas uniquement sur la bonne réponse, mais plutôt sur le raisonnement qui la sous-tend).

Hunter, J., Anthony, G., Burghes, D. (2016). Scaffolding teacher practice to develop early algebraic reasoning. In C. Kieran (ed.) *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds, ICME-13 Monographs, 34,* 379-401.

The goal of the activity was to develop a "conjecturing atmosphere" in the mathematics classroom. The authors define such atmosphere as a classroom where viable algebraic reasoning opportunities occur, students make conjectures, construct mathematical arguments, justify ideas, use age-appropriate proof, and generalize their ideas. It is based on this kind of classroom atmosphere that students can develop algebraic thinking, and better prepare for the later introduction of formal algebra in mathematics.

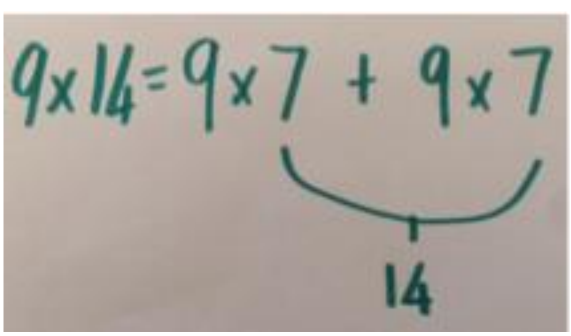
The analysis was based on a professional development project implemented by the authors. One teacher in particular had significant shifts in her practices, and the authors analyze what worked well in her classroom. Three main aspects of her teaching practices fostered students' ability to conjecture and justify their mathematical ideas.

The first aspect is about justifications. During lessons, the teacher maintained the expectation that conjectures would be expressed and proved while facilitating a consistent expectation for generalization. She used questioning such as: would it work for different numbers? Or: can I change that into something that would work for any number?

The second aspect is that the teacher consistently engaged her students in building generalizations in the classroom. She achieved this by noting the conjectures that students made and then facilitating the whole class to investigate these. This involved testing and revising the conjecture and developing it into a generalization.

Finally, the third aspect of the classroom practices was that students would justify their conjectures using concrete materials. For example, a student made a conjecture about dividing by one: It's just like you're getting one group and dividing it by one group, so you have already done it. If you've got a number and you divide it by one, it ends up that number. The teacher then asked the student to demonstrate and justify this idea using materials: Show what you mean with counters on the board.

Results show that students started building on previous generalizations and conjectures to explain their own reasoning. As the teacher's students gained more experience in justification, they more readily drew on material to prove their reasoning. For example, using a task involving the distributive property (e.g., Write the correct sign for 9 x 14 __ 9 x 7 + 9 x 7), the teacher facilitated the students to draw on representations to justify their reasoning. Building on previous work in the classroom that investigated the distributive property, many students began to generalize the distributive property to solve the tasks.



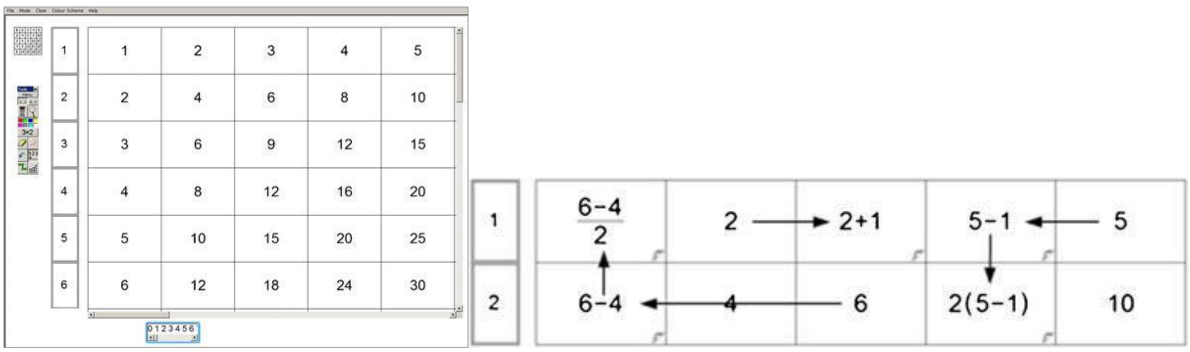
Students also shifted in the way they engaged with classroom activities. They started using more often algebraic explanations and structures to find patterns and solve tasks in class. The consistent focus on the mathematical practices of justification, generalization, and proof led to students drawing on previously examined conjectures and generalizations in their explanations.

This approach can be applied not only to the strict context of algebra, but it really encompasses a different way of knowing and doing mathematics. Teachers can press on students' responses and use them to generate productive discussions. Not only does it engage students in more cognitively demanding tasks, but it also makes them more aware of the whole process of learning (they do not focus only on the right answer, but rather on the reasoning behind it).

Hewitt, D. (2012). Young students learning formal algebraic notation and solving linear equations: are commonly experienced difficulties avoidable? ***Educational Studies in Mathathematics, 81,*** **139–159.**

Le but de cette activité était de renforcer la familiarité des élèves avec les équations linéaires, en particulier le signe égal, en considérant les expressions comme des processus et non comme des objets, en apprenant à accepter la notation formelle et l’ordre de lecture dans cette notation. Les résultats de cette recherche ont été basés sur des classes enregistrées sur vidéo et des captures d'écran de logiciels. Le chercheur a conçu et enseigné des leçons pour un groupe de compétences variées composé d'élèves du primaire âgés de 21 à 5 ans (âgés de 9 à 10 ans) qui n'avaient jamais reçu d'instruction formelle et qui utilisaient des lettres pour représenter des inconnues ou des variables dans un contexte mathématique. On leur a enseigné au total trois leçons d'une heure chacune pour la première leçon et d'une heure et demie chacune pour les deux autres leçons.

Les leçons ont été enseignées principalement à l'aide du logiciel Grid Algebra sur un tableau blanc interactif centré sur toute la classe.



L'algèbre de la grille est basée sur une grille de tables de multiplication. La ligne un contient le tableau une fois, la ligne trois le tableau trois, etc. Un aspect essentiel de l'algèbre de grille est qu'il peut exprimer les opérations effectuées lors du déplacement d'une cellule à une autre. Par exemple, pour passer du numéro 2 au numéro 3 de la première ligne, vous devez en ajouter un. Avec le logiciel, vous pouvez saisir le numéro 2 et faire glisser une cellule vers la droite pour afficher 2 + 1 dans la cellule précédemment affichée. 3 dedans (voir l'image ci-dessus).

Parfois, les étudiants travaillaient sur des exercices papier basés sur le logiciel. Il y avait deux sessions dans une salle informatique où les étudiants travaillaient sur des tâches générées par ordinateur fournies dans le progiciel. Un aspect important du style d’enseignement est que rien n’a jamais été expliqué aux étudiants, y compris l’aspect particulier de la notation formelle. Au lieu de cela, il y avait un usage intensif de questionnement et de tâches soigneusement choisies. Un grand nombre de ces tâches impliquait que les étudiants s’adressent au tableau et se servent de sa nature interactive pour déplacer des expressions sur la grille dans le logiciel. En règle générale, on demandait aux étudiants d’expliquer ce que tout mouvement signifiait en termes d’opérations avant de les faire. Cela signifiait, par exemple, que lorsque l'expression 2 + 1 serait sur le point de passer de la rangée 1 à la rangée 2, les étudiants ont dit qu'elle serait multipliée par deux.

Les trois leçons ont été structurées de manière à prendre en compte certains développements clés: 1) Nombre d'activités (apprendre à connaître la structure de la grille); 2) Mouvements dans la grille (notation de réunion; 3) Utilisation de la notation pour recréer des parcours (ordre d'apprentissage des opérations); 4) Répéter les activités consistant à recréer des parcours lors de l’introduction de lettres et à travailler sur l’écriture ainsi que sur la lecture d’expressions (accepter la notation formelle avec des lettres, les lettres comme variables); 5) substitution (voir les lettres comme des nombres particuliers); 6) itinéraires différents d'une même cellule de départ à une même cellule d'extrémité (en multipliant les parenthèses); 7) Trouver la lettre, étant donné une expression impliquant cette lettre (opérations inverses); 8) Placer un nombre dans la même cellule que l'expression finale et utiliser le nombre inversé pour trouver la valeur de la lettre (résolution des équations).

Il y a eu plusieurs moments au cours desquels les étudiants ont été excités par de plus grandes expressions. Par exemple, lorsqu'ils ont eu le défi du groupe entier d'essayer de recréer l'expression ci-dessous, le niveau de bruit a augmenté de manière significative avec une excitation animée alors qu'ils utilisaient les mouvements des mains pour discuter de ce que pourrait être le chemin.

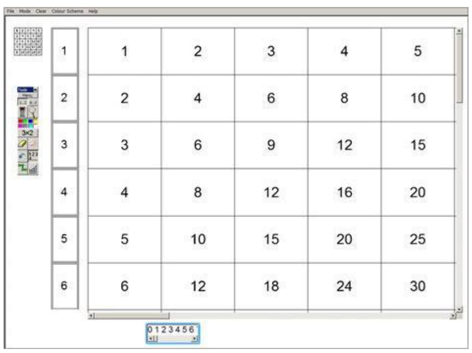
$$2\left(\frac{2\left(\frac{2(33-2)+2}{2}+3\right)-2}{2}-1\right)-4$$

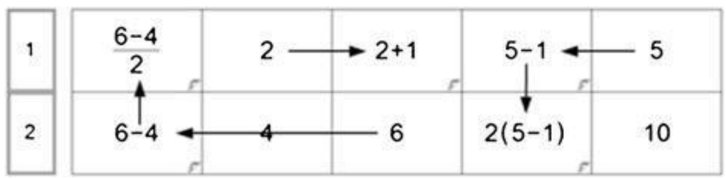
Les étudiants en sont venus à avoir une confiance considérable dans la notation formelle, se sentant même enthousiasmés par l'idée de travailler avec des expressions assez complexes impliquant plus de 10 opérations. En outre, ils étaient flexibles dans leur capacité à concevoir une expression à la fois comme un objet et comme un processus. L'ordre des opérations a été aidé en voyant les expressions être construites une opération à la fois à travers chaque mouvement de la grille. Dans l'ensemble, les élèves de 5e année ont réussi à obtenir un succès d'environ 70% avec des questions sur la résolution d'équations linéaires après seulement trois leçons, sur le point de ne jamais avoir été initié aux lettres ni avoir respecté la notation formelle. Plus important encore, ils étaient à l'aise avec la lecture, l'écriture et l'utilisation de la notation algébrique formelle, notamment des lettres. En bref, ils n'ont pas rencontré certaines des difficultés communes évoquées au début de cet article.

Hewitt, D. (2012). Young students learning formal algebraic notation and solving linear equations: are commonly experienced difficulties avoidable? *Educational Studies in Mathematics, 81*, 139–159.

The goal of the activity was to strengthen students' familiarity with linear equations, particularly the equal sign, seeing expressions as processes and not so much as objects, learning to accept formal notation and reading order of operations within that notation. The results of this research were based on video recorded classrooms and software screenshots. The researcher designed and taught lessons for a mixed ability group of 21 Year 5 primary students (aged 9– 10 years old) who had previously never had formal instruction using letters to stand for unknowns or variables in a mathematics context. They were taught just three lessons lasting one hour for the first lesson and one and a half hours each for the other 2 lessons.

The lessons were taught mainly using the software *Grid Algebra* on an Interactive Whiteboard with a whole class focus.





Grid Algebra is based on a grid of multiplication tables. Row 1 has the one times table, row three has the three times table, etc. A key aspect of Grid Algebra is that it can express the operations carried out when moving from one cell to another. For example, moving from the number 2 to the number 3 in row one involves adding one and with the software the number 2 can be picked up and dragged one cell to the right so that it will show 2+1 in the cell which previously had 3 in it (see the image above).

Occasionally students worked on paper exercises based upon the software and there were two sessions in a computer room where students worked on computer-generated tasks provided within the software package. A significant aspect of the style of teaching was that nothing was ever explained to the students, including the particular appearance of formal notation. Instead, there was extensive use of questioning and carefully chosen tasks. Many of these tasks involved students coming up to the board and using the interactive nature of the board to move expressions around the grid within the software. Generally, students were asked to articulate what any movement meant in terms of operations before the movements were made. This meant, for example, that when the expression 2+1 was about to be moved down from row 1 to row 2, the students said that it would be multiplying by two.

The three lessons were structured to address certain key developments: 1) Number activities (getting to know the structure of the grid); 2) Movements within the grid (meeting notation; 3) Using notation to re-create journeys (learning order of operations); 4) Repeating activity of re-creating journeys whilst letters were introduced and work on writing as well as reading expressions (accepting formal notation with letters, letters as variables); 5) Substitution (seeing letters as particular numbers); 6) Different routes from the same start cell to the same end cell (multiplying out brackets); 7) Finding the letter, given an expression involving that letter (inverse operations); 8) Placing a number in the same cell as the final expression and taking the number on the inverse journey to find the value of the letter (solving equations).

There were several moments in which students became excited with bigger expressions. For example, when they had the whole group challenge of trying to re-create the expression below, the noise level rose significantly with animated excitement as they used hand movements to discuss what the path might be.

$$2\left(\frac{2\left(\frac{2(33-2)+2}{2}+3\right)-2}{2}-1\right)-4$$

Students came to have considerable confidence with formal notation, even feeling excited about the idea of working with quite complex expressions involving more than 10 operations. In addition, they were flexible in being able to think of an expression both as an object and as a process. The order of operations was assisted by seeing expressions being built up one operation at a time through each movement on the grid. Overall, Year 5 students were able to gain a success of around 70% with questions on solving linear equations after only three lessons from a starting point of never having been introduced to letters nor having met formal notation. More significantly, they were confident with reading, writing and working with formal algebraic notation including letters. In short, they did not experience some of the common difficulties discussed at the beginning of this paper.

Fischer, J., Sander, E., Sensevy, G., Vilette, B., Richard, J. (2019). Can young students understand the mathematical concept of equality? A whole-year arithmetic teaching experiment in second grade. *European Journal of Psychology of Education, 34,* 439–456.

Le but de cet article était de répondre à la question suivante: est-il possible d'enseigner l'arithmétique de manière à ce que les élèves ne mal interprètent pas le signe égal?

Les auteurs utilisent le terme « interprétation erronée » pour faire référence à la compréhension commune selon laquelle les enseignants et les élèves reproduisent le signe égal comme réponse finale, par opposition à l'équivalence de deux termes. Cette compréhension est au cœur des multiples difficultés que rencontrent les élèves plus tard lorsqu'ils se familiarisent avec l'algèbre. Les auteurs ont donc conçu un programme pour déterminer s'il était possible de créer un programme réussi pour un enseignement ordinaire en classe. Ils ont évalué l'impact du programme via une expérience impliquant 2 095 élèves de deuxième année et utilisant une conception pré-test / post-test.

Le programme comprenait 150 heures d'enseignement arithmétique, soit 36 semaines x 5 heures par semaine de mathématiques, comme prévu dans le programme officiel français, moins 30 heures de géométrie, qui ne faisait pas partie du programme. Ce nombre d'heures permet de nombreuses autres activités, même s'il est au-delà de la portée du présent document de les décrire en détail. Parce qu'il correspond au nombre d'heures recommandé dans le programme officiel, il devrait être équivalent à celui pratiqué dans les classes de contrôle.

Les élèves avaient d'abord appris à écrire des sommes sans calcul via un « jeu d'énoncé », dans lequel ils devaient noter intégralement le résultat du lancement de deux dés. Par exemple, si les dés montraient cinq et trois, ils devaient écrire 5 + 3, pas 8. Si un deuxième lancer des dés donnait un 6 et un 4, les élèves pourraient écrire 5 + 3 <6 + 4, en justifiant leur écriture sans calcul en observant que 5 <6 et 3 <4. De même, si le résultat du second lancer était 4 et 1, ils pourraient écrire 5 + 3> 4 + 1, car 5> 4 et 3> 1. Quand cette procédure ne s'appliquait pas, par exemple, en comparant 5 + 1 et 6 + 3, les étudiants ont explicitement déclaré que la procédure ne s'appliquait pas et utilisaient leur méthode de contrôle spontané, à savoir compter les deux sommes.

Les auteurs soutiennent que l'utilisation des symboles d'inégalité de cette manière facilite l'apprentissage du signe égal. De nombreux autres écrits difficiles (par exemple, 9 + 1 + 4 + 6 + 5 + 5 + 8 + 2) qui ne favorisent pas un calcul automatique de gauche à droite - ici, l'informatique (9 + 1) + (4 + 6) + (5 + 5) + (8 + 2) lorsque les élèves ont mémorisé les compléments à 10 - ont été pratiqués au cours de l'année scolaire. De plus, chaque élève avait un cahier personnel - un « Journal des nombres » - dans lequel il / elle pouvait inventer des écrits stimulants.

Pour montrer l'utilité d'écrire une somme, on a montré aux élèves, par exemple, quatre points dans un carré, cinq points dans un quinconce et trois points dans un triangle. Le temps d'affichage était limité afin que les élèves puissent percevoir, sans compter, les trois groupes de points. Ils ont ensuite été autorisés à noter le nombre qu'ils ont vu en écrivant « 4 + 5 + 3 ». Pour favoriser la lecture a = b + c, des représentations rectangulaires ont été utilisées pour représenter les problèmes d'égalité et de complément manquant.

<table><tr><td colspan="2">**13**</td></tr><tr><td>7</td><td>6</td></tr></table>

<table><tr><td colspan="2">**13**</td></tr><tr><td>?</td><td>6</td></tr></table>

The other major components of arithmetic were also taught in such a way as to avoid instilling the "operations = answer" format. For example, in the problem-solving and numerical estimation subdomains, students were taught not to rush into performing a computation. Instead, they were encouraged to examine the situation described in the problem and estimate an approximate result for a complex computation (e.g., 39 + 52) before computing a precise answer.

Students who were taught this program achieved better results, combining all four dimensions of arithmetic: arithmetic writing, mental computation, word-problem solving, and estimation. They were particularly better at writing subdomain when compared to the other dimensions. The effect of this program in the equality writing dimension was not obtained at the expense of learning in the other dimensions. Encouragingly, the effect was durable and cumulative, which means that student retained their understanding later in their schooling. At the very least, the present results open the way for using this approach to teach the mathematical notion of equality, first in second grade and then at higher school grades. Finally, one important adaptation the authors point out is that the program they created can be similarly applied to all four arithmetic operations, making it more flexible in clarifying the meaning of the equal sign.

Fischer, J., Sander, E., Sensevy, G., Vilette, B., Richard, J. (2019). Can young students understand the mathematical concept of equality? A whole-year arithmetic teaching experiment in second grade. *Eur J Psychol Educ, 34,* 439–456.

The goal of the article was to answer the following question: Is it possible to teach arithmetic in such a way that students do not misinterpret the equal sign?

The authors use the term “misinterpret” to make reference to the common understanding that teachers and students reproduce of the equal sign as the final answer as opposed to equivalence of two terms. This understanding is at the core of multiple difficulties students experience later when they are introduced to algebra. Therefore, the authors designed a program to determine whether it is possible to create a successful program for regular classroom teaching. They assessed the program's impact via an experiment involving 2295 second grade students and using a pre-test/post-test design.

The program consisted of 150 h of arithmetic teaching, namely 36 weeks × 5 h per week of mathematics as planned in the French official program minus 30 h of geometry, which was not included in the program. This number of hours allows many other activities, although it is beyond the scope of the present paper to describe them in detail. Because it matches the number of hours recommended in the official curriculum, it should be equivalent to that practiced in the control classes.

Students were initially taught to write sums without computation via a “Statement Game”, in which they had to note in full the outcome of throwing two dice. For example, if the dice showed five and three, they had to write $5 + 3$, not 8. If a second throw of the dice resulted in a 6 and a 4, the students could write $5 + 3 < 6 + 4$, justifying their writing without computation by observing that $5 < 6$ and $3 < 4$. Likewise, if the outcome of the second throw was 4 and 1, they could write $5+3 > 4+1$, because $5 > 4$ and $3 > 1$. When this procedure was not applicable, for example, when comparing $5 + 1$ and $6 + 3$, the students explicitly stated that the procedure did not apply, and used their spontaneous method of control, that is, counting the two sums.

The authors argue that using the inequality symbols in this way facilitates learning about the equal sign. Many other challenging writings (e.g., $9 + 1 + 4 + 6 + 5 + 5 + 8 + 2$) that do not promote an automatic left-to-right computation – here computing $(9 + 1) + (4 + 6) + (5 + 5) + (8 + 2)$ when the students have memorized the complements to 10 – were practiced during the school year. Moreover, each student had a personal notebook – a “Journal of Numbers” – in which he/she could invent challenging writings.

To show the utility of writing a sum, students were shown displays of, for example, four dots in a square, five dots in a quincunx, and three dots in a triangle. The display time was limited so students could perceive, but not count, the three groups of dots. They were then allowed to note the number they saw by writing “$4 + 5 + 3$”. To favor the reading $a = b + c$, rectangular representations were used to represent both “equalities” and “missing addend” problems.

<table><tr><td colspan="2">13</td></tr><tr><td>7</td><td>6</td></tr></table>

<table><tr><td colspan="2">13</td></tr><tr><td>?</td><td>6</td></tr></table>

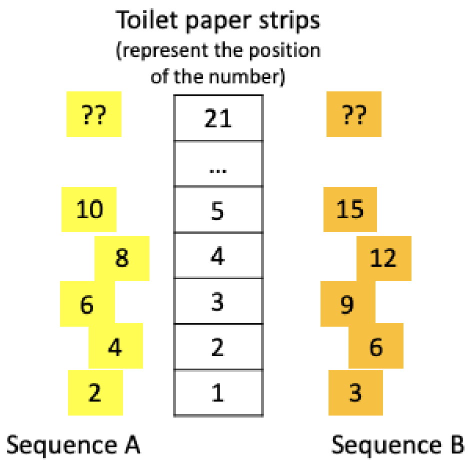
The other major components of arithmetic were also taught in such a way as to avoid instilling the “operations = answer” format. For example, in the problem-solving and numerical estimation subdomains, students were taught not to rush into performing a computation. Instead, they were encouraged to examine the situation described in the problem and estimate an approximate result for a complex computation (e.g., $39 + 52$) before computing a precise answer.

Students who were taught this program achieved better results, combining all four dimensions of arithmetic: arithmetic writing, mental computation, word-problem solving, and estimation. They were particularly better at writing subdomain when compared to the other dimensions. The effect of this program in the equality writing dimension was not obtained at the expense of learning in the other dimensions. Encouragingly, the effect was durable and cumulative, which means that student retained their understanding later in their schooling. At the very least, the present results open the way for using this approach to teach the mathematical notion of equality, first in second grade and then at higher school grades. Finally, one important adaptation the authors point out is that the program they created can be similarly applied to all four arithmetic operations, making it more flexible in clarifying the meaning of the equal sign.

Ferrara, F., Sinclair, N. (2016). An early algebra approach to pattern generalisation: Actualising the virtual through words, gestures and toilet paper. ***Educational Studies in Mathematics, 92*****, 1–19.**

Le but de l'activité était de développer la capacité de voir les modèles qui émergent de la relation entre un nombre et sa position dans la séquence, et nous appelons cette relation fonctionnelle. Les résultats de cette recherche ont été basés sur des salles de classe enregistrées sur vidéo et des photos du travail des étudiants au cours du projet. Les chercheurs ont conçu une leçon pour les élèves de 3e année (8 à 9 ans) divisée en 2 sessions de 4 heures chacune (en Italie, les cours de mathématiques sont généralement organisés en sessions de 4 heures). Les étudiants travaillaient à deux, individuellement et en classe. Au cours de l'activité, 3 adultes étaient présents, mais un seul d'entre eux était chargé d'enseigner la leçon. Les élèves ont utilisé des bandes de papier hygiénique pour représenter la position des nombres dans une séquence et les post-it comme numéros dans chaque séquence. Ils ont été invités à trouver les numéros dans une séquence en fonction de leurs positions sans compter depuis le début.

Au cours de l'activité, les élèves ont travaillé sur le sol et ont exploré la séquence en se levant, en la parcourant et en la pointant du doigt. Cette pratique était un élément important qui permettait aux élèves de donner un sens à l’activité et d’exprimer leur raisonnement même s’ils ne possédaient pas le vocabulaire approprié.



Au début, les élèves s’appuyaient sur les chiffres précédents pour comprendre la séquence, en essayant de compter. Pour aider les élèves à découvrir la relation fonctionnelle, l'enseignant a utilisé plusieurs invites telles que: "Sans compter, je veux une réponse qui m'explique comment trouver la position dans laquelle la chaussure droite arrive à 26 sans compter! (Plus fort) Immédiatement! », "s'il vous plaît trouver en utilisant SEULEMENT UNE opération", puis "je n'ai pas dit sans addition, multiplication, division. J'ai dit directement (en poussant les mains jointes en avant), avec une opération unique". Les élèves ont également été invités à comprendre la relation inverse (à partir d’un numéro, indiquez dans quelle position il se trouve). Le passage à la relation fonctionnelle n’est intervenu qu’à la fin de la deuxième session et il en émergeait encore à la fin.

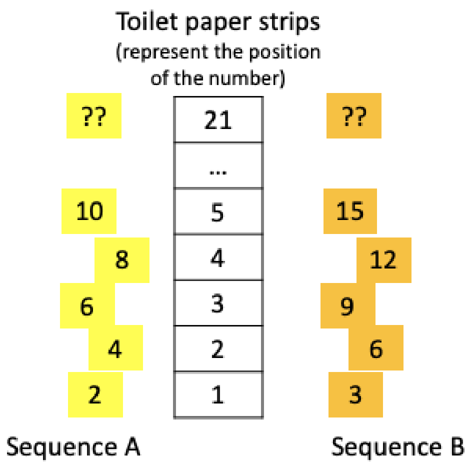
Les gestes des élèves et leurs choix de vocabulaire sont deux des aspects les plus importants auxquels les enseignants doivent prêter attention afin de vérifier leur évolution vers une relation fonctionnelle. Par exemple, à un certain moment de la leçon, le papier hygiénique est relié de manière nouvelle à la séquence par les gestes de transformation d’Agnese et de Filippo, qui déterminent la relation entre les numéros de position (actualisés par le papier hygiénique) et les numéros de séquence. En outre, l'utilisation de mots pour indiquer la position du nombre en tant que variable fournit en elle-même une preuve de la relation fonctionnelle.

L'activité peut être facilement adaptée en utilisant des séquences plus ou moins difficiles et la représentation est assez flexible. Nous devrions naviguer entre les approches récursive et fonctionnelle aussi longtemps que les élèves ont besoin de comprendre. Les positions peuvent être plus ou moins difficiles et des écarts entre les positions peuvent être introduits afin de promouvoir la pensée fonctionnelle. Apprendre à trouver la relation inverse est un élément clé de l'activité, car il aide les étudiants à développer un raisonnement plus flexible.

Ferrara, F., Sinclair, N. (2016). An early algebra approach to pattern generalisation: Actualising the virtual through words, gestures and toilet paper. ***Educ Stud Math, 92,*** **1–19.**

The goal of the activity was to develop the ability to see the patterns that emerge from the relationship between a number and its position in the sequence, and we call this *functional relationship.* The results of this research were based on video recorded classrooms and photos of student work during the project. The researchers designed a lesson for Grade 3 (8-9 years old) students divided into 2 sessions of 4 hours each (in Italy, mathematics classes usually are organized in 4-hour sessions). The students worked in pairs, individually and as a whole class. During the activity, 3 adults were present, but only one of them was in charge of teaching the lesson. Students used toilet paper strips to represent the positions of numbers in a sequence, and post-it pieces as the numbers in each sequence. They were asked to find the numbers in a sequence based on their positions without counting up from the beginning.

During the activity, students worked on the floor and explored the sequence by standing up and walking through it and pointing with their fingers. This practice was an important element that allowed students to make sense of the activity and express their reasoning even when they did not have the appropriate vocabulary.



At first, the students were relying on the previous numbers to figure out the sequence, trying to count-up. To help students discover the *functional relationship,* the teacher used several prompts such as: "Without counting, I want an answer that explains to me how I can find the position in which right shoe arrives at 26 without counting! (louder) Immediately!", "please find it using ONLY ONE operation", and then "I didn’t say without addition, multiplication, division. I said directly (pushing the hands joined in front), with a unique operation". The students were also asked to figure out the inverse relationship (given a number in the sequence, find out in which position it is). The shift towards *functional relationship* only happened at the end of the second session, and it was still emerging by the end of it.

The gesturing of students and their vocabulary choices are two of the most important aspects that teachers should pay attention to in order to verify their shift towards *functional relationship*. For example, at a certain moment in the lesson, the toilet paper becomes connected to the sequence in a new way by the transformation gestures of Agnese and Filippo, who figure out the relationship between the position numbers (actualised by the toilet paper) and the sequence numbers. Also, the use of words to indicate the position of the number as a variable in itself provides evidence of *functional relationship*.

The activity can be easily adapted by using sequences more or less difficult and the representation is quite flexible. We should navigate between the recursive and functional approaches as long as it takes for students to understand. The positions can be more or less challenging, and gaps between positions can be introduced in order to promote functional thinking. Learning to find the reverse relation is a key element of the activity, one helping students develop a more flexible way of reasoning.

Nacarato, M. A., Dias dos Anjos, D., Silva Santos, C. & Moreira, K. (2017). Le rôle de l'interaction verbale pour l'acquisition de la pensée algébrique dans l'enseignement primaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20*(3), 56-78.

Nacarato et ses collaborateurs (2017) ont étudié l'évolution des conceptions de la pensée algébrique chez 29 élèves de 3e année primaire (8-9 ans) à l'aide des interactions verbales. Celles-ci se sont réalisées à travers des tâches dont la construction se basait sur la perception des régularités et la génération de patterns (motifs) dans des suites non numériques (suites figuratives). Les objectifs didactiques des activités concernent l'étude la pensée algébrique dans le discours verbale des élèves (rôle du langage) en contexte de résolution de tâches en grand groupe visant à susciter l'émergence de questionnements pour décrire la formation d'une suite non-numérique, de prévoir la position d'un élément quelconque, d'identifier la régularité et chercher une généralisation tout en communiquant clairement les idées à autrui. La construction des six tâches est fondée sur les notions d'ordre et de régularité: le motif, le nombre de termes et leur position dans une suite. Les élèves se sont engagés dans les activités en travail collaboratif (grand groupe) en faisant usage du matériel de manipulation (ex. : perles, morceaux de fils, allumettes), avec un environnement informatique (tâches 4-5-6) et parfois en employant des gestes et des mouvements corporels pour trouver la régularité (tâche 1). Exemple : dans la tâche 5, un motif de cinq émojis était présenté dans l'ordre suivant: triste, gai, triste, gai, gai. L'élève devait identifier combien d'émojis gais devraient se trouver dans la suite si elle présentait par exemple 25 éléments. Voici des échanges élève/enseignante :

« T37 Paulo: Par exemple, prof: il y a dix numéros. On en met cinq sur chacun.

T38 Enseignant: Comment ça?

T39 Paulo: Par exemple: il y a dix émojis. Deux tristes, un heureux, deux tristes, un heureux. Là, ça va faire trois. Deux tristes et un heureux. Alors on met deux tristes de plus, ça va terminer sur les deux tristes. »

L'élève contribue à la discussion concernant ce que serait une suite et un motif de répétition. Ses premiers mots (T37) n'ayant pas vraiment de sens, l'enseignante lui pose une question (T38). Paulo explicite son idée, démontrant qu'il était capable de généraliser puisqu'il a élaboré une nouvelle suite sur laquelle il base son explication (T39).

Les aspects importants de la mise en œuvre en classe sont les suivants : 1) l'enseignante amène les élèves à discuter de leur compréhension d'une suite non-numérique montrant le rôle du mot dans le développement de la pensée algébrique ; 2) les propos d'un élève provoquent ceux d'un autre et les idées émergent, les significations se produisent. Le mot est donc un déclencheur pour la pensée algébrique; 3) l'enseignante a un rôle de médiation dans l'élaboration conceptuelle de l'élève.

Le rôle de l'interaction verbale (élève/enseignante et élève/élève) est primordial dans la démarche de résolution de ces tâches puisque les interactions montrent la place du langage dans le développement de la pensée algébrique. Il y a une évolution des conceptions des élèves à travers les échanges. Ils ont pu exprimer leurs manières de penser, émettre des hypothèses, etc. De plus, ils sont amenés à comprendre les idées des autres, ce qui a fait évoluer leur propre pensée. Le langage mathématique est introduit et utilisé de plusieurs façons : 1) dans la tâche 1, « Former une file », le langage corporel (geste et positionnement des élèves dans la file) sert à trouver la régularité dans la suite; 2) Dans la tâche 3 « Les allumettes », le matériel manipulé, constitue un artefact médiateur de la perception de la régularité dans laquelle le total d'allumettes de chaque figure peut être exprimé par la loi de la formation: $16 - n$, où n est le numéro de la figure ; 3) Dans la tâche 4 « Défi du modèle », où les élèves devaient identifier la régularité d'un modèle disposé sur deux lignes ayant le même nombre de carrés blancs et toujours un carré noir à la fin de la première, l'outil de représentation constitue le dessin du motif suivant de la suite.

Les tâches peuvent être adaptées aux différents besoins des différents groupes d'élèves, voici des exemples: 1) la tâche 4 « Défi du modèle » peut être réalisée avec du matériel de manipulation : bandes de papier blancs/noirs que l'élève doit disposer correctement après les 4 premières figures de la suite; 2) ajouter la verbalisation audio pour soutenir des élèves présentant une difficulté en lecture. Les résultats de l'étude sont qualitatifs et montrent que les interactions verbales élèves/enseignante favorisent le développement de la pensée algébrique sans l'introduction explicite du langage mathématique (Mason, 2007; Radford, 2013, 2014).

Nacarato, M. A., Dias dos Anjos, D., Silva Santos, C. & Moreira, K. (2017). Le rôle de l'interaction verbale pour l'acquisition de la pensée algébrique dans l'enseignement primaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20*(3), 56-78.

Nacarato et al. (2017) studied the evolution of the conceptions of algebraic thought in 29 students in the 3rd grade (8-9 years) using verbal interactions. These were realized through tasks whose construction was based on the perception of regularities and the generation of patterns in non-numerical sequences (figurative sequences). The didactic objectives of the activities concern the study of algebraic thought in students' verbal discourse (role of language) in the context of large-scale task resolution aiming to provoke the emergence of questions to describe the formation of a non-digital sequence, to predict the position of any element, to identify the regularity and to seek a generalization while clearly communicating the ideas to others. The construction of the six tasks is based on the notions of order and regularity: the motive, the number of terms and their position in a sequence. Students engaged in collaborative work (large group) using manipulatives (e.g. beads, strings, matches), with a computer environment (tasks 4-5-6) and sometimes using gestures and body movements to find regularity (task 1). Example: In task 5, a pattern of five emojis was presented in the following order: sad, cheerful, sad, gay, cheerful. The student had to identify how many gay emojis should be in the sequel if it had, for example, 25 elements. Here are student / teacher exchanges:

"T37 Paulo: For example, prof: there are ten numbers. We put five on each.

T38 Teacher: How?

T39 Paulo: For example: there are ten emojis. Two sad, one happy, two sad, one happy. There, it'll be three. Two sad and one happy. So we put two more sad, it will end on both sad. "

The student contributes to the discussion about what would be a sequence and a reason for repetition. Her first words (T37) do not really make sense, the teacher asks her a question (T38). Paulo explains his idea, demonstrating that he was able to generalize since he has developed a new suite on which he bases his explanation (T39).

Important aspects of classroom implementation are as follows: 1) the teacher leads students to discuss their understanding of a non-numerical suite showing the role of the word in the development of algebraic thought; 2) the words of one pupil provoke those of another and the ideas emerge, the meanings occur. The word is therefore a trigger for algebraic thought; 3) the teacher has a mediating role in the conceptual development of the student.

The role of verbal interaction (student / teacher and pupil / student) is essential in the process of resolving these tasks since the interactions show the place of language in the development of algebraic thought. There is an evolution of the conceptions of the pupils through the exchanges. They could express their ways of thinking, make assumptions, etc. In addition, they are led to understand the ideas of others, which has changed their own thinking. The mathematical language is introduced and used in several ways. In task 1, "Form a sequence", the body language (gesture and positioning of students in the queue) is used to find the regularity in the sequence. In task 3 "Matches", the material manipulated constitutes a mediating artifact of the perception of regularity in which the total of matches of each figure can be expressed by the law of the formation "16 – n", where n is the position of the figure. In task 4 "Challenge of the model", where the pupils had to identify the regularity of a model arranged on two lines having the same number of white squares and always a black square at the end of the first one, the tool of representation is the drawing of the next pattern in the sequence.

The tasks can be adapted to the different needs of the different groups of students. Task 4 "Challenge of the model" can be realized with manipulatives: white / black strips of paper to allow manipulations; One can add audio verbalisation to support students with reading difficulties. The results of the study are qualitative and show that student / teacher verbal interactions favor the development of algebraic thought without the explicit introduction of mathematical language (Mason, 2007, Radford, 2013, 2014).

Polotskaia, E., Savard, A. Freiman, V. (2017). La genèse de la pensée algébrique: Macroanalyse d'une séquence d'enseignement expérimentale au primaire, *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20*(3), 79-105.

Polotskaia et ses collaborateurs (2017) présentent des analyses qualitatives d'activités portant sur les problèmes écrits ayant une structure additive) qui ont été soumis à des groupes de 1re et 2e année du primaire (6-8 ans) durant 3 ans. Les trois types d'activités expérimentés sont : 1) activités de manipulation avec des objets physiques, étude de leurs propriétés (longueur) et leurs structures ; 2) activités d'analyse de problèmes écrits : la situation mathématiquement incohérente (SMI), le jeu du capitaine, la résolution de problèmes et l'analyse de schémas ; 3) une activité de résolution sur l'ordinateur intégrant la relation additive, les opérations et le formalisme mathématique (www.elenapolotskaia.com). Plusieurs modalités du travail ont été proposées aux élèves : en grand groupe, en équipe et individuel. À partir des réponses obtenues, les auteurs ont réajusté les activités selon l'objectif de recherche.

Les intentions didactiques des activités sont d'amener les élèves à analyser les problèmes arithmétiques en portant leur attention sur la relation additive qui est présente et à devenir plus efficaces dans l'analyse des problèmes pour ensuite les solutionner. Les activités visent également à développer la pensée algébrique à travers la résolution de problèmes en se concentrant sur les relations entre les quantités, et les activités encouragent l'utilisation graduelle d'un symbolisme pour représenter, modéliser ces relations.

Les aspects importants de la mise en œuvre des activités en classe par l'enseignant consistent à rendre visible les relations dans les problèmes écrits additifs, à développer la compréhension de ces relations et d'animer des discussions afin que les élèves puissent déduire les opérations à effectuer afin de résoudre les problèmes. Par exemple, dans une activité SMI, l'enseignant propose aux élèves une description de situation dont les valeurs numériques ne correspondent pas au sens de la situation (J'ai 3 crayons. Toi, tu as 5 crayons. Ensemble, nous avons 10 crayons.). L'enseignante détaille l'organisation du travail: 1) analyser la situation et la représenter par un schéma sans tenir compte des valeurs des nombres; 2) analyser la représentation particulière, pour chaque nombre choisi comme inconnu, afin de déduire l'opération permettant de trouver la valeur du nombre selon le sens de la situation; 3) faire le calcul et donner du sens au résultat en retournant à la situation; 4) analyser et comparer les trois possibilités travaillées au regard de leurs représentations respectives et des opérations leur correspondant.

L'utilisation des lettres en tant qu'éléments d'abstraction des quantités connues et inconnues dans la construction des schémas permet une entrée au formalisme mathématique conformes au langage mathématique. En outre, ces activités aident les élèves à développer leur capacité d'apprentissage du raisonnement par l'usage de la communication, plus spécifiquement à travers les discussions suscitées par l'enseignante et des moments de raisonnement collectif à voix haute. Les activités proposées peuvent être adaptées aux différents besoins des groupes d'élèves. Voici des exemples : 1) l'activité de résolution de problème sur l'ordinateur possèdent plusieurs niveaux de complexité où l'élève choisit un niveau afin de travailler dans sa zone de développement proximale; 2) Les élèves peuvent analyser un problème en recourant à la manipulation de bandes de papier afin de comprendre et de modéliser les relations entre les quantités ; 3) La synthèse vocale peut être ajouter pour soutenir des élèves présentant une difficulté en lecture.

Polotskaia, E., Savard, A. Freiman, V. (2017). La genèse de la pensée algébrique: Macroanalyse d'une séquence d'enseignement expérimentale au primaire, *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20*(3), 79-105.

Polotskaia et al. (2017) present qualitative analyzes of activities on written problems with an additive structure) that were submitted to groups of 1st and 2nd year of primary (6-8 years) for 3 years. The three types of activities experienced are: 1) manipulation activities with physical objects, study of their properties (length) and their structures; 2) written problem analysis activities: the mathematically inconsistent situation (SMI), the captain's game, problem solving and schema analysis; 3) an activity of resolution on the computer integrating the additive relation, the operations and the mathematical formalism (www.elenapolotskaia.com). Several modalities of the work were proposed to the pupils: in big group, in team and individual. From the responses obtained, the authors readjusted the activities according to the research objective.

The didactic intentions of the activities are to get students to analyze arithmetic problems by focusing on the additive relationship that is present and to become more effective in analyzing problems and then solving them. The activities also aim to develop algebraic thinking through problem solving by focusing on the relationships between quantities, and the activities encourage the gradual use of a symbolism to represent, model these relationships.

Important aspects of the teacher's implementation of classroom activities are to make relationships in additive written problems visible, to develop an understanding of these relationships and to facilitate discussions so that students can deduce perform to solve the problems. For example, in an IMS activity, the teacher offers students a situation description whose numeric values do not correspond to the sense of the situation (I have 3 crayons. You have 5 crayons. Together we have 10 crayons.). The teacher explains the organization of the work: 1) analyze the situation and represent it in a diagram without taking into account the values of the numbers; 2) analyze each particular representation, for each number chosen as unknown, in order to deduce the operation making it possible to find the value of the number according to the sense of the situation; 3) do calculations and give meaning to the result within the situation; 4) analyze and compare the three possibilities worked with regard to their respective representations and their corresponding operations.

The use of letters as elements of abstraction of known and unknown quantities in the construction of schemas allows an entry to mathematical formalism in conformity with the mathematical language. In addition, these activities help students develop their ability to learn reasoning through the use of communication, specifically through teacher-initiated discussions and moments of collective reasoning aloud. The proposed activities can be adapted to the different needs of groups of students. Here are some examples: 1) Problem solving activity on the computer has several levels of complexity where the student chooses a level in order to work in his zone of proximal development; 2) Students can also analyze a problem by manipulating paper strips to understand and model the relationships between quantities; 3) Audio records of problems can be added to support students with reading difficulties.

Squalli, H. (2015) La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 346-356.

Squalli (2015) présente des situations de résolution de problèmes nommées *Pentamino* qu'il a expérimentées durant 12 séances dans une école secondaire avec un groupe de 15 élèves âgés de 13-14 ans ayant de graves difficultés d'apprentissage (avec 2 ans de retard au niveau académique). Les activités ont été conçus pour favoriser un processus de généralisation. Il s'agit d'utiliser une grille numérique formée de 7 lignes et 10 colonnes, contenant la suite des nombres de 1 à 80 (figure 1); sur laquelle on place une forme (constituée de cinq rectangles opaques sauf deux, voir figure 2) selon une orientation fixée.

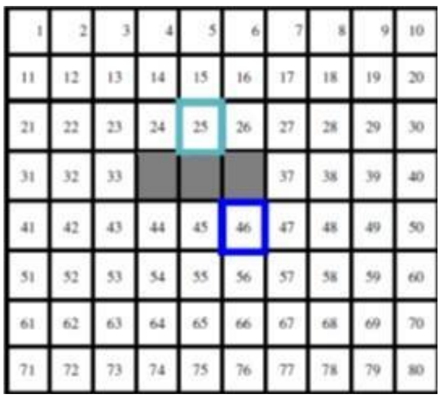


Figure 1 Grille numérique

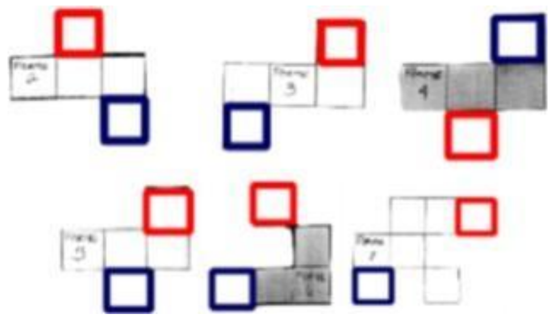


Figure 2 Différentes formes

Chaque forme est reliée à la règle d'une relation fonctionnelle affine (concept principal de l'étude) que l'élève doit trouver. Cette règle peut s'écrire $y = x + k$ où x représente le nombre de la case de départ, y celui de la case d'arrivée et k une constante. La régularité réside dans la constance des écarts $y - x$. L'objectif de l'activité est de construire une stratégie gagnante pour une forme donnée, c'est-à dire permettant de prédire, sans le support de la grille numérique, le nombre apparaissant dans la case nommée sortie (case bleu) étant donné un nombre initial connu dans la case nommée entrée (case rouge).

La situation comporte 3 tâches : 1) pour une forme donnée et sans la grille, prédire le nombre qui va apparaître dans la case « sortie » connaissant le nombre de la case « entrée » ; 2) comparer des formes proposées par l'enseignant pour déterminer celle qui est la plus difficile pour réaliser la tâche de prédiction; 3) construire la forme la plus difficile. La 1^re^ tâche consiste en un jeu où les élèves doivent prédire le résultat sans la grille. Ceci vise la formulation d'une règle générale pour une forme donnée. Les 2^e^ et 3^e^ tâches ont comme objectif d'amener les élèves à se détacher de la répétition des expériences puis à envisager une règle générale pour l'ensemble des formes présentées.

Des variations du travail ont été réalisées par les élèves : travail en binôme sur les tâches, puis ils se sont confrontés entre équipe en comparant leurs stratégies de résolution. Ils ont utilisé différents systèmes d'actions qui peuvent être configurés en 3 grandes familles. **F1**: famille qui regroupe les systèmes d'actions basées sur des déplacements horizontaux et verticaux sur la grille au voisinage de la forme. Les stratégies des élèves sont alors décrites sous forme d'une chaîne d'opérateurs: -2, + 10, + 10. Dans cette famille, le véhicule des actions est constitué par la forme du pentamino. Les invariants sont liés à la structure de la grille numérique et à la forme du pentamino. **F2**: Cette famille repose sur le calcul du nombre de cases entre la case « entrée » et la case « sortie », une fois la forme posée sur la grille numérique. Ici, le véhicule des actions n'est pas la forme du pentamino, mais les positions relatives des nombres des cases « entrée « et « sortie ». Les invariants mathématiques sont liés à la constance de l'écart entre ces deux nombres quelle que soit la position de la forme sur la grille. **F3**: cette famille contient les systèmes d'actions reposant sur la comparaison des chiffres des unités et des chiffres des dizaines du nombre de la case « entrée » et du nombre de la case « sortie ». L'invariant mathématique est décrit selon un couple d'opérateurs (- n, + m) que l'on applique respectivement au chiffre des unités et au chiffre des dizaines du nombre de la case « entrée ».

L'activité *Pentamino* a aidé les élèves à développer leur capacité d'apprentissage à travers les interactions (en binôme et en confrontation entre équipes) où ils ont utilisé la pensée relationnelle pour traduire des invariants de façon symbolique. Ainsi, cette activité a eu un impact positif sur leur processus de généralisation. Par exemple, au début de l'activité, un élève décrit sa stratégie pour la forme 2 ainsi : « Augmente de un, puis descend de un, puis descend encore de un parce que chaque ligne c'est dix ». Cette description, porte sur trois objets : les actions réelles (par ex., « descends de un »), les invariants mathématiques (« augmente de 1 ») ainsi que la justification d'un invariant (« parce que chaque ligne c'est dix » à propos de l'invariant implicite : « quand tu descends de 1 ajoute 10 »). Plus tard, cet élève décrit sa stratégie pour la forme 3 en une chaîne d'opérateurs « -2, +10, +10 ». Bien que cette description soit symbolique, elle tire son sens et son caractère opératoire du système d'actions initial (« avancer de deux cases à droite, descendre d'une case, descendre encore d'une case »).

Les aspects importants de la mise en œuvre en classe par l'enseignante : pour la 1re tâche, l'enseignante explique aux élèves qu'ils auront à prédire le nombre dans la case « sortie » et simule un jeu entre elle et un élève (un élève donne un nombre et l'enseignante prédit le nombre dans la case « sortie »). Ensuite, les élèves sont invités à se familiariser avec le jeu, puis à jouer en duo, un contre un avec la forme 2. À la fin de la 1re séance, les équipes de 4 joueurs jouent l'un contre l'autre sans la grille par l'intermédiaire d'un représentant qui inscrit ses réponses au tableau devant la classe mais sans les montrer aux autres équipes.

Au niveau du langage mathématique, l'activité n'amène pas l'utilisation de la notation symbolique explicitement, mais plutôt à l'expression de généralisation dans le langage spontané des élèves. Les activités proposées peuvent être adaptées aux différents besoins des groupes d'élèves (ex. : ajouter la verbalisation audio lors des interactions en duo et en équipe).

Pour contrer les obstacles d'apprentissage, l'activité Pentamino montre qu'au lieu de se centrer sur les graves difficultés des élèves, il faut miser sur leurs connaissances et leurs capacités de raisonnements. Les résultats de l'expérimentation ont été analysés à l'aide du modèle de généralisation de Dörfler (1991). Cette étude confirme le rôle essentiel que jouent les systèmes d'actions initiaux dans le processus de généralisation. Les généralités construites par les élèves sont empreintes des actions qui ont mené à leur formulation.

Squalli, H. (2015) La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. In Theis L. (Ed.) ***Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*** **– Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 346-356.**

Squalli (2015) presents problem solving situations named Pentamino that he experienced during 12 sessions in a high school with a group of 15 students aged 13-14 with severe learning difficulties (2 years late) at the academic level). The activities were designed to promote a process of generalization. It is a question of using a numerical grid formed of 7 lines and 10 columns, containing the sequence of the numbers from 1 to 80 (figure 1); on which is placed a form (consisting of five opaque rectangles except two, see Figure 2) in a fixed orientation.

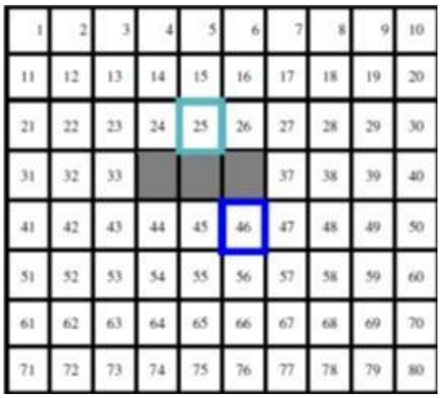


Figure 1 Digital grid

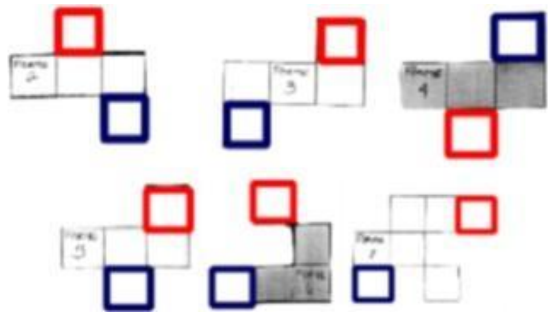


Figure 2 Different shapes

Each form is related to the rule of an affine functional relationship (the main concept of the study) that the student must find. This rule can be written as y = x + k where x is the number of the starting square, y is the number of the ending square and k is a constant. The regularity lies in the constancy of the differences y - x. The objective of the activity is to build a winning strategy for a given form, that is to say, to predict, without the support of the numerical grid, the number appearing in the box named exit (blue box) given an initial number known in the box named entry (red box).

The situation has 3 tasks: 1) for a given form and without the grid, predict the number that will appear in the "exit" box knowing the number of the "entry" box; 2) compare forms proposed by the teacher to determine which is the most difficult to perform the task of prediction; 3) build the most difficult form. The first task is a game where students must predict the outcome without the grid. This is aimed at formulating a general rule for a given form. The second and third tasks are intended to lead students to detach themselves from the repetition of the experiments and then to consider a general rule for all the forms presented.

Variations of the work were done by the students: work in pairs on the tasks, then they confronted between team comparing their strategies of resolution. They used different action systems that can be configured into 3 large families. F1: family that groups action systems based on horizontal and vertical displacements on the grid in the vicinity of the form. The strategies of the students are then described in the form of a chain of operators: -2, + 10, + 10. In this family, the vehicle of the actions is constituted by the form of the pentamino. Invariants are related to the structure of the digital grid and the shape of pentamino. F2: This family is based on the calculation of the number of boxes between the "entry" box and the "exit" box, once the form is placed on the digital grid. Here, the vehicle of the actions is not the form of the pentamino, but the relative positions of the numbers of the boxes "entry" and "exit". Mathematical invariants are related to the constancy of the difference between these two numbers regardless of the position of the form on the grid. F3: This family contains the action systems based on the comparison of the numbers of the units and the tens figures of the number of the "entry" box and the number of the "exit" box. The mathematical invariant is described according to a pair of operators (- n, + m) that is applied respectively to the units digit and to the tens digit of the number of the "input" box.

The Pentamino activity helped students develop their learning capacity through interactions (in pairs and in confrontation between teams) where they used relational thinking to translate invariants in a symbolic way. Thus, this activity had a positive impact on their generalization process. For example, at the beginning of the activity, a student describes his strategy for form 2 as follows: "Increases by one, then descends by one, then descends by one because each line is ten". This description deals with three objects: real actions (e.g., "descends of one"), mathematical invariants ("increases by 1") and the justification of an invariant ("because each line is ten "about the implicit invariant:" when you go down from 1 adds 10 "). Later, this student describes his strategy for form 3 in a chain of operators "-2, +10, +10". Although this description is symbolic, it derives its meaning and its operational character from the initial system of actions ("move forward two spaces to the right, go down one space, go down one more space").

Important aspects of the classroom implementation by the teacher: for the first task, the teacher explains to the students that they will have to predict the number in the "exit" box and simulate a game between her and a student (a student gives a number and the teacher predicts the number in the "exit" box). Then, students are invited to become familiar with the game, and then play as a duo, one against one with form 2. At the end of the first session, teams of 4 players play against each other without the grid through a representative who writes his answers on the board in front of the class but without showing them to the other teams.

At the level of mathematical language, the activity does not bring the use of explicit symbolic notation, but rather the expression of generalization in the spontaneous language of the pupils. The proposed activities can be adapted to the different needs of groups of students (e.g., add audio verbalization during pair and team interactions).

To counteract learning barriers, the Pentamino activity shows that instead of focusing on the serious difficulties of students, it is necessary to build on their knowledge and reasoning skills. The results of the experiment were analyzed using Dörfler's model of generalization (1991). This study confirms the essential role that initial action systems play in the process of generalization. The generalities built by the students are marked by the actions that led to their formulation.