Fonds de recherche
Société et culture
Québec

Rapport de recherche

PROGRAMME ACTIONS CONCERTÉES

La réussite en mathématiques au secondaire commence à la maternelle: Synthèse des connaissances sur les pratiques d'enseignement des mathématiques efficaces à la maternelle et au primaire pour réussir l'algèbre du secondaire?

Chercheure principale
Elena Arkhipova, Université du Québec en Outaouais

Cochercheurs
Annie Savard, Université McGill
Nathalie Silvia Anwandter Cuellar, Université du Québec en Outaouais

Collaborateurs
Claudine Gervais, Commission scolaire des Grandes-Seigneuries
Marie-Sophie Gélinas, Commission scolaire de la Vallée-des-Tisserands
Valériane Passaro, Université de Montréal
Ildiko Pelczer, Université Concordia
Vanessa St-Jacques, étudiante à la maitrise, UQO
Marie-Christine Gauthier, étudiante à la maitrise, UQO
Alexandre Cavalcante, étudiant au doctorat, McGill
Azadeh Javaherpour, étudiante au doctorat, McGill
Ali Motlagh, étudiant au doctorat, McGill
Amélie Poulin, étudiante au baccalauréat, McGill
Steve Tremblay, étudiant au doctorat, UQAM

Établissement gestionnaire de la subvention
Université du Québec en Outaouais

Numéro du projet de recherche (synthèse des connaissances)
2019-0PZS-264486

Titre de l'Action concertée
Programme de recherche sur la persévérance et la réussite scolaires

Partenaires de l'Action concertée
Le Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur (MEES)
et le Fonds de recherche du Québec – Société et culture (FRQSC)

La réussite en mathématiques au secondaire commence à la maternelle : Synthèse des connaissances sur les pratiques d'enseignement des mathématiques efficaces à la maternelle et au primaire pour réussir l'algèbre du secondaire.

Synthèse de connaissances scientifiques

Par Valériane Passaro

UQO

Octobre 2019

Table des matières

I. Rappel de l’objectif et des questions de recherche

Objectif : L’objectif principal de ce projet est de **documenter**, à l’aide de l’étude des résultats de recherches existantes, **les pratiques enseignantes reportées comme efficaces au préscolaire et au primaire du point de vue de leur potentiel à développer une pensée mathématique chez les élèves afin de diminuer les ruptures avec l’algèbre du secondaire**. Nous proposons de poser un **regard didactique et développemental sur l’ensemble des connaissances scientifiques disponibles po**ur **identifier les points forts et les lacunes** des connaissances sur le développement graduel et assuré de la pensée mathématique chez les jeunes élèves. Nous visons aussi à **dégager des pistes d'action** tels que : modifications au programme, développement de documents explicatifs-didactiques-pédagogiques destiné aux professionnels du milieu scolaire, changement ou ajustement des pratiques existantes.

Questionnement global :

Quelles sont, au Québec et ailleurs dans le monde, les pratiques reconnues efficaces d'enseignement des mathématiques à la maternelle et au primaire pouvant prévenir de difficultés en mathématique (algèbre) au secondaire?

Questionnement spécifique :

1) **Selon les ouvrages scientifiques les plus connus sur le raisonnement algébrique et son développement, quels sont les concepts et les pratiques mathématiques racines?**
2) **Parmi les ouvrages scientifiques consultés, quels sont ceux qui décrivent des activités ou des approches didactiques en lien avec le but de développement du raisonnement algébrique ou la pensée algébrique ou leurs racines? Quelles sont les caractéristiques de ces activités?**
3) **Que peut-on retirer de l’analyse qualitative de ces activités et des approches dans le plan pratique? Quelles suggestions aux praticiennes du milieu, aux cadres supérieurs, aux chercheurs?**

II. À propos des difficultés et des lacunes des élèves en algèbre

Différentes difficultés sont répertoriées dans la littérature :

1. Une conception inadéquate du signe d'égalité (Stephens et al., 2013). Le signe d'égalité doit effectivement être vu en algèbre comme exprimant une relation d'équivalence (conception relationnelle) alors qu'en arithmétique, il indique plutôt qu'une opération doit être effectuée et signifie alors « donner le résultat » (conception opérationnelle). La conception opérationnelle du signe d'égalité apparait comme un obstacle à la compréhension en algèbre particulièrement lors de la résolution d'équations (Knuth, Stephens, McNeil et Alibali, 2006). Il est ainsi reconnu que le développement d'une conception relationnelle du signe d'égalité est un facteur qui favorise la réussite en algèbre (Blanton, Otálora et al., 2018).

2. Les procédures et algorithmes effectués en arithmétique sont généralement appris par cœur sans que les structures et propriétés mathématiques sous-jacentes ne soient mises à jour. Pour Carpenter et al. (2005), cette façon de faire nuit à l'apprentissage de l'algèbre puisque ces propriétés constituent une base commune à l'arithmétique et à l'algèbre. Les élèves ne reconnaissent donc pas que les opérations en arithmétique et en algèbre s'appuient sur les mêmes idées fondamentales.

3. La propriété de distributivité est la propriété des opérations qui pose le plus de difficulté aux élèves en algèbre (Carpenter et al., 2005).

4. La résolution d'équations de la forme Ax+B=Cx+D est une difficulté clé qui a mené Filloy et Rojano (1989) à décrire la rupture entre l'arithmétique et l'algèbre. En effet, les équations du type Ax+B=D sont faciles à résoudre par opérations inverses et donc à l'aide d'opérations arithmétiques (on remonte simplement à l'envers). Mais quand les équations de la forme Ax+B=Cx+D se présentent, les élèves doivent mettre en œuvre un raisonnement analytique et opérer sur une inconnue. C'est-à-dire qu'ils doivent considérer les quantités indéterminées comme si elles étaient connues, comme si elles étaient des nombres.

5. La compréhension du sens de la lettre en algèbre est une difficulté importante (Stephens, 2005). En fait, la lettre peut prendre différent sens selon ce qu'elle représente dans un contexte donné. Les fausses conceptions sont nombreuses; la lettre est souvent vue comme une abréviation ou une étiquette à laquelle une valeur est attribuée (la position de la lettre dans l'alphabet en est un exemple). Les élèves ont donc de la difficulté à opérer avec des lettres en les considérant comme remplaçant des quantités variables. Ils ont fortement tendance à les voir comme remplaçant des valeurs spécifiques.

Certains auteurs identifient, de plus, l'origine des difficultés en algèbre :

1. Les difficultés des élèves en algèbre résultent des approches limitées qui leur ont été enseignées en arithmétiques et en mathématiques élémentaires (Booth, 1988 citée par Carraher et al., 2006).

Le manque de sens lors de la manipulation symbolique dans une approche traditionnelle est particulièrement problématique (Lannin et al., 2006).

2. Les élèves sont généralement initiés à l'algèbre dans le contexte de la résolution d'équations. Malheureusement, cette façon de faire encourage les élèves à envisager la lettre comme représentant une valeur unique et nuit à la compréhension de la notion de variable. (Carraher et al., 2006)

III. Les axes de développement de la pensée algébrique

Les textes qui ont été retenus pour ce bilan suggèrent tous une approche nouvelle et/ou des activités visant le développement d'habiletés, de manière de faire ou de penser en lien avec la pensée algébrique chez les enfants de niveaux préscolaire et primaire (3 à 12 ans). Certains auteurs suggèrent des approches plus proches d'une introduction de l'algèbre (symbolisme, généralisation, résolution d'équations, etc.) alors que d'autres proposent plutôt des manières de faire pour développer certaines dimensions de la pensée algébrique. À partir des textes sélectionnés, nous avons dégagé trois axes caractéristiques du développement de la pensée algébrique au préscolaire et au primaire : développement de la pensée relationnelle, développement de la généralisation de patterns et développement de la pensée fonctionnelle. **Ces trois entrées dans la pensée algébrique ont en commun les actions de généralisation, de justification et de représentation ainsi que la mise en évidence de structures, de propriétés et de modèles mathématiques.**

A. La pensée relationnelle

Concepts associés : quantité indéterminée, relation, structure additive, structure multiplicative, égalité, équivalence, comparaison, propriétés des opérations, sens du nombre, mesure, proportionnalité, équation linéaire, compensation, opposé

Plusieurs auteurs considèrent que ce sont les modèles et les structures qui définissent les mathématiques (Mulligan et Mitchelmore, 2009; Warren et Cooper, 2005). Dans cette optique, Warren et Cooper (2005) indiquent que les modèles abstraits sont à la base des connaissances structurelles visées par l'apprentissage des mathématiques. Par ailleurs, la perception et l'expression de la structure sont des activités de nature algébrique.

Pour Carpenter et al. (2005), on met à profit la pensée relationnelle (*relational thinking*) lorsqu'on s'intéresse aux relations et aux propriétés fondamentales des opérations arithmétiques plutôt qu'aux procédés calculatoires menant à un résultat numérique. Ainsi, on mobilise une pensée relationnelle lorsqu'on est en mesure de voir une expression arithmétique ou algébrique comme un objet en soi plutôt que comme l'indication de calculs à effectuer. La pensée relationnelle supporte à la fois la compréhension de l'arithmétique et de l'algèbre. Carpenter et al. (2005) suggèrent de développer la pensée relationnelle dans un cadre arithmétique au primaire et soutiennent que ce travail favorise par la suite l'apprentissage de l'algèbre. Pour eux, développer une conception adéquate du signe d'égalité est essentiel mais pas suffisant. La pensée relationnelle implique une conscientisation des propriétés des opérations de manière à les utiliser et les reconnaitre mais sans forcément les définir formellement. Par exemple, pour trouver la valeur manquante dans $8 + 4 = \_\_ + 5$ l'enfant pourrait additionner 8 et 4 et chercher ce qu'on doit ajouter à 5 pour avoir 12. Cette stratégie correcte est avant tout opératoire puisque l'enfant regarde l'équation de gauche à droite et voit en premier lieu qu'il doit effectuer une addition. Lorsqu'on mobilise une pensée relationnelle on considère l'équation dans son ensemble et on exploite l'équivalence avant tout. On peut d'abord anticiper que comme 5 est plus grand que 4 alors le nombre manquant doit être plus petit que 8 puis décomposer le réarranger l'expression de gauche en enlevant 1 à 8 et en le donnant à 4 pour retrouver le 5. Implicitement, l'expression de gauche est décomposée et l'associativité de l'addition mise à profit : $8+4=(7+1)+4=7+(1+4)=7+5$.

La pensée relationnelle chez les jeunes enfants

Cet axe de développement de la pensée algébrique est suggéré pour les jeunes enfants par quelques auteurs. **Lee, Collins et Melton (2016)** suggèrent des activités de manipulation et de communication visant à comparer des attributs et des quantités. Ils soutiennent qu'en favorisant certaine expériences concrètes il est possible d'amorcer la construction des bases de la compréhension des formes abstraites qui seront vues plus tard en algèbre. Pour comprendre l'algèbre il faut d'abord comprendre les modèles et les symboles. Chez les tout-petits, les marques de dénombrement et les dominos peuvent faire œuvre de premières symbolisations. Par la suite, l'écriture des nombres apparait comme une symbolisation importante qui permet de représenter un nombre d'objets concret. Pour ces auteurs, les principaux objets à travailler dans l'enseignement préscolaire et primaire sont les modèles présentant des répétitions (patterns), les structures, les relations quantitatives et la variation.

À la base de ces objets, les auteurs identifient deux actions importantes : associer et trier. En effet, ces activités habituelles et naturelles chez les jeunes enfants font appel à sa capacité à identifier des caractéristiques ou des attributs. Il doit ainsi déterminer ce qui est pareil et ce qui est différent. *Cette habileté est essentielle en algèbre par exemple lors de l'identification de termes semblables pour réduire une expression algébrique. Elle est aussi essentielle pour distinguer les variables des paramètres dans une situation donnée.*[1]
Dans cette même perspective, l'usage de diagramme de Venn pour classer des objets selon certains attributs communs ou non est intéressant (les objets peuvent directement être placés dans les sections appropriées).

Ils considèrent aussi que le travail sur les modèles est fondamental. Les jeunes enfants peuvent voir, expérimenter et comprendre les actions de répétition, d'extension et de prédiction lorsqu'ils travaillent avec des suites d'objets ou de motifs. Ils peuvent aussi être initiés aux notions de croissance, de décroissance et de variation.

La relation d'équivalence et d'égalité peut être abordée en jouant sur l'équilibre d'une balance. La masse des objets est alors la grandeur sur laquelle on s'appuie pour déterminer si une balance est en équilibre ou non, ou pour rétablir un équilibre. On peut

[1] Ici c'est moi qui fait le lien car les auteurs disent uniquement que c'est utile en algèbre.

ainsi faire parler les élèves sur la comparaison des quantités et introduire un vocabulaire important : autant, plus, moins, total, somme, différence, retirer, ajouter, etc.
La compréhension de la variation repose sur la qualification et la quantification du changement. Les jeunes enfants peuvent être amenés à qualifier le changement d'une quantité dans des problèmes simples mais variés. Par exemple, on peut leur faire observer l'évolution de leur taille tout au long de l'année et montrer qu'elle augmente. On peut aussi encourager les enfants à comparer des attributs physiques (taille, poids, largeur, etc.). La qualification du changement de ces attributs pourra soutenir la quantification du changement qu'ils auront à étudier plus tard en algèbre.

Au sujet de l'égalité **Blanton, Otálora et al. (2018)** s'intéressent à la compréhension de la notion d'équivalence chez les jeunes enfants avant, pendant et après une intervention spécifique. Pour eux, la compréhension du signe d'égalité est fondamentale dans le développement du raisonnement algébrique. Ils décrivent les conceptions des élèves à propos du signe d'égalité avant l'enseignement puis comment ces conceptions évoluent pendant un enseignement qui met l'accent sur la vision relationnelle de l'égalité.
En comparant les réponses à un pré-test et un post-test et en analysant les discussions en classe lors des séances, les auteurs décrivent 3 interprétations possibles du signe d'égalité. Cette description tient compte de ce que les enfants disent à propos du sens du signe d'égalité, de comment ils l'utilisent lorsqu'ils construisent une équation arithmétique et de comment ils l'interprètent lorsqu'ils font face à une telle équation. Les niveaux sont évidemment une manière de décrire la compréhension à un moment précis et dans une tâche donnée, ils ne reflètent pas la compréhension globale de l'élève et son évolution.

Niveau 1 : pensée opérationnelle

Le signe d'égalité est perçu comme indiquant qu'une opération doit être effectuée. Ici, le signe d'égalité signifiait « donner un total ». Les enfants indiquent par exemple que le signe d'égalité signifie « ce qu'il y a en tout » ou « le nombre qu'on obtient est ». Les enfants qui mobilisent cette pensée opérationnelle déterminent la validité d'une égalité en vérifiant que la somme exprimée à gauche du signe d'égalité est égale au nombre écrit directement à droite du signe. Ainsi, une égalité comme 3 + 2 = 1 + 4 est considérée fausse par l'enfant qui explique que lorsqu'on ajoute 2 à 3 on n'obtient pas 1. Une égalité du type $a = b + c$ est aussitôt transformée pour avoir une forme standard (le signe opératoire à gauche et la réponse à droite), par exemple, $a - b = c$. Une égalité de la forme $a = a$ n'étant pas acceptable puisqu'aucune opération n'est à effectuer, l'enfant la transforme en remplaçant par exemple le signe d'égalité par un signe d'addition pour obtenir 5 + 5 = 10. Les stratégies des enfants qui mobilisent une pensée opérationnelle sont caractérisées par une incapacité à interpréter, résoudre, évaluer et représenter des équations sous format non-standard dans lesquelles le signe d'égalité n'est pas utilisé pour marquer qu'une opération doit être effectuée.

Niveau 2 : pensée relationnelle émergente

Le signe d'égalité est toujours perçu comme un opérateur indiquant qu'une action doit être posée, mais il est aussi accepté comme marqueur d'équivalence entre deux expressions arithmétiques. Les équations de la forme $a=b+c$ sont acceptées par l'enfant qui les voit simplement comme un retour en arrière. Dans un cas du type $a+b=c+d$, l'enfant voit qu'il y a des quantités à ajouter donc il opère dans un premier temps (opérationnel) mais il accepte ensuite que le signe d'égalité indique que les deux quantités comparées sont équivalentes (relationnel). La tendance reste à réécrire les équations sous forme standard pour les vérifier ou justifier qu'elles sont valides.

Niveau 3 : pensée relationnelle

Le signe d'égalité est défini comme un symbole qui indique l'équivalence entre deux quantités (par exemple, « à gauche on a la même chose qu'à droite »). L'idée de balance est évoquée pour justifier qu'une équation est valide ou non. Par exemple, devant 8 + 2 = 10 + 3 l'enfant indique que l'égalité est fausse car « Ça ne balance pas. Je sais que lorsqu'on ajoute 2 à 8 ça fait 10 mais ici on ajoute encore 3 à 10. ». La pensée relationnelle est davantage mobilisée par les élèves dans le contexte des tâches de vrai ou faux et d'équations ouvertes de la forme $a=a$ et $a+b=c+d$.
Il est à noter qu'aucun enfant n'a mis en place une <u>stratégie de compensation</u> pour justifier l'équivalence. Cette stratégie décrite par Carpenter et al. (2003) implique de percevoir la structure de l'équation et d'évaluer plusieurs équivalences pour comparer. Par exemple, en raisonnant par compensation pour déterminer le nombre manquant dans l'égalité 5 + 2 = __ + 3 on pourrait se dire que comme 3 est 1 de plus que 2 alors le nombre manquant doit être 1 de moins que 5 soit 4.
Les auteurs constatent que l'intervention a particulièrement permis aux élèves d'évaluer l'équivalence dans les équations du type $a+b=c+d$ même si la conception opérationnelle semble persistante. Les tâches du type $a=b+c$ et $a=a$ se sont avérées de bons déclencheurs pour le développement de la pensée relationnelle. Ils remarquent aussi que les définitions de l'égalité données par les enfants ne sont souvent pas cohérentes avec leurs interprétations de l'égalité dans les différentes tâches. Par conséquent, ils suggèrent de ne pas mettre l'emphase sur la définition dans l'enseignement mais plutôt sur la variété des tâches proposées aux élèves de manière à ce qu'ils développent une conception relationnelle plus solide. Ils rappellent aussi que les équivalences entre quantités sont très bien comprises en contexte (ici lors de la manipulation des objets) mais qu'elles sont plus difficiles à interpréter symboliquement et sans contexte. Par conséquent, il est important de travailler autant le sens de l'équivalence que sa traduction et son interprétation dans un langage mathématique.

La stratégie de compensation qui demande un niveau de généralisation plus élevé n'est pas mobilisée par les jeunes enfants. Les auteurs suggèrent toutefois de faire travailler les enfants sur la comparaison d'expressions comme 3 + 1 et 3 + 2 et les amener à justifier que l'une est plus grande que l'autre de 1 parce que 2 est 1 de plus que 1.

Stephens et al. (2013) déterminent, quant à eux, 3 conceptions de l'égalité : *opérationnelle, relationnelle-computationnelle et relationnelle-structurelle*. Ils s.appuient sur des tâches reconnues pour favoriser le développement d'une pensée relationnelle: 1) vrai/faux (particulièrement : équations avec opérations des deux côtés de l'égalité et illustration directe de propriétés connues), 2) phrases mathématiques trouées (particulièrement avec grands nombres). Ils concluent que le passage à une pensée relationnelle n'est pas difficile mais instable et qu'il faut forcer les élèves à regarder le signe d'égalité autrement.

Dans l'esprit du travail de l'équivalence et des transformations qui permettent de conserver l'égalité, **Baroody et Lai (2007) et Lai, Baroody et Johnson (2008)** suggèrent des activités pour les enfants de maternelle. Ils décrivent la compréhension du principe de l'opération inverse addition/soustraction qui consiste à ajouter puis retirer la même quantité de manière à conserver une quantité initiale. Ils considèrent que ce principe contribue à la compréhension du nombre et permet de développer les habiletés à raisonner, à résoudre des problèmes et à opérer. La notion d'opération inverse est aussi très importante pour comprendre le sens des opérations. Reconnaitre que l'addition et la soustraction sont liées et que l'une peut défaire l'autre témoigne de l'habileté de réversibilité décrite notamment par Piaget et Moreau (1977). Le principe de l'inverse permet notamment de faciliter des calculs qui peuvent avoir l'air complexe, par exemple pour résoudre 8 + 27 – 27, il n'est pas nécessaire d'effectuer l'addition puis la soustraction puisqu'ajouter puis retirer le même nombre revient à ne rien faire. Ce principe de l'inverse sera aussi largement utilisé lors de la transformation d'expressions algébriques.
Face aux résultats aux pré-tests et post-tests d'un groupe expérimental et d'un groupe controle, Lai et al. (2008) constatent que l'entrainement a eu un impact positif sur la réussite des élèves qui au départ n'avait pas bien réussi le pré-test. Baroody et Lai (2007), en comparant les différents groupes d'âge, remarquent que la compréhension du principe de l'inverse s'amorce chez les enfants de 3-4 ans mais de manière inconsistante, puis se solidifie vers 5-6 ans. Le nombre d'objets ajouté semble avoir un impact sur la perception du principe d'inverse. Par exemple, les enfants constatent facilement que l'ajout et le retrait de deux objets ne changent pas la quantité initiale mais ils ont plus de difficulté à voir cette propriété quand on ajoute puis retire 4 objets. Les auteurs suggèrent de travailler le principe d'inverse lorsque les enfants savent compter et dénombrer et qu'ils ont une bonne idée des transformations d'ajout et de retrait. Les prolongements de ce type de travail peut mener à des décompositions facilitant le calcul mental (par exemple,

pour effectuer 9 + 8 on décompose 9 en (10-1) et 8 en (7+1) de manière à faire apparaitre l'ajout et le retrait d'un même nombre (-1 +1)).

En résumé, les différents auteurs qui suggèrent d'amorcer le développement d'une pensée relationnelle dès la pré-maternelle le font à travers des activités sur les quantités et les opérations sur ces quantités. À la base il s'agit donc d'une manière d'aborder une arithmétique généralisée en dégageant des principes ou des stratégies avant même que les enfants n'aient développé d'habiletés en calcul. Les exemples donnés permettent ainsi de développer simultanément le sens du nombre, les habiletés arithmétiques et les habiletés algébriques à travers la décomposition du nombre, l'ordre, la classification, l'équivalence, le principe d'inverse et la compensation. Ainsi, le développement de la pensée algébrique se fait en concomitance avec celui de la pensée arithmétique, et ce, dans l'optique de dégager les structures communes.

Dans cette même optique, **Britt et Irwin (2008)** décrivent « The Numeracy Project » un projet sur le développement de la numératie chez des élèves du primaire expérimenté en Nouvelle-Zélande. Le projet visait initialement à développer le sens du nombre et des opérations à travers une approche flexible de la résolution de problèmes en contexte numérique. Des stratégies et des connaissances à acquérir sont décrites et les auteurs en relèvent plusieurs qui, selon eux, constituent des opportunités de travailler la généralisation et, par conséquent, la pensée algébrique. Parmi celles-ci apparaissent différentes stratégies de calcul mental :

- la compensation avec l'addition $a+b=(a+c)+(b-c)$
- la compensation avec la soustraction $a-b=(a+c)-(b+c)$
- la compensation avec la distributivité de la multiplication sur l'addition $xy=x(y+a)-xa$
- la compensation avec la multiplication $xy=(ax)\left(\frac{y}{a}\right)$
- l'équivalence entre une somme et une différence : si $a+b=c$ alors $a=c-b$
- l'équivalence avec les fractions, par exemple, si $\frac{a}{b}=\frac{an}{x}$ alors $x=bn$

Les auteurs constatent que les élèves qui ont suivi le projet sur la numératie au primaire sont plus habiles à dégager la structure et à généraliser lors de la résolution de problèmes arithmétiques puis ils réussissent mieux dans les tâches algébriques. Les auteurs considèrent que le programme sur la numératie en favorisant le développement d'habiletés arithmétiques orientées sur la généralisation de principes et de propriétés est un exemple *d'approche de l'algèbre à l'intérieur de l'arithmétique*. Il s'agit donc d'aborder simultanément l'arithmétique et l'algèbre en s'appuyant sur des tâches arithmétiques dans lesquelles on dégage des structures et des généralités.

La pensée relationnelle au primaire

Équivalence, décomposition et propriétés des opérations

Dans la suite des précédents auteurs, **Fischer et al. (2019)** proposent de faire travailler plus spécifiquement l'écriture de la décomposition des nombres à l'aide de deux jeux proposés à des élèves de 2e année : le jeu de dés et le jeu du trésor. Dans les deux cas on demande aux élèves de travailler avec des quantités exprimées sous forme d'une somme sans effectuer le calcul. Dans le jeu de dés, l'enfant doit écrire la somme obtenue après avoir lancé deux dés puis en répétant l'opération il doit comparer deux sommes en n'effectuant pas de calcul. Dans le jeu du trésor, l'enfant doit reconnaitre un bouquet derrière lequel se cache un trésor alors qu'on lui indique le nombre de fleurs que comporte le bouquet à l'aide d'une somme (chaque bouquet est composé de roses et de tulipes). Dans ce dernier cas, effectuer la somme ne sert à rien puisque le nombre total de fleurs dans chaque bouquet est le même, ce qui diffère c'est la répartition des roses et des tulipes.
À partir d'un pré-test, d'un post-test et d'une expérimentation avec groupe contrôle, les auteurs évaluent l'impact des activités réalisées en classe. L'ensemble de l'intervention s'est déroulée sur 150 heures durant lesquelles d'autres activités du même type ont été réalisées. Les élèves du groupe expérimental performent mieux que les autres dans le post-test relativement aux items qui concerne l'écriture de la décomposition des nombres. Les auteurs concluent qu'il est possible de développer une conception adéquate de l'égalité en terme d'équivalence dès la 2e année du primaire.

Pour développer la pensée relationnelle, **Carpenter et al. (2005)** suggèrent de travailler l'arithmétique en se concentrant sur les relations et sur le sens des procédures. Par exemple, si pour calculer 40 + 50 l'enfant pense à 4 dizaines auxquelles on ajoute 5 dizaines alors on peut l'amener à décortiquer son raisonnement et écrire les équivalences obtenues de manière à ce qu'il puisse, plus tard, mobiliser le même raisonnement pour réduire l'expression 4y + 5y :

$$40 + 50 = 4 \times 10 + 5 \times 10 = (4 + 5) \times 10 = 9 \times 10 \quad \text{and}$$
$$4y + 5y = (4 + 5)y = 9y$$

Les auteurs montrent des exemples de questionnements menés par des enseignants pour amener des élèves de 3e année à conscientiser l'usage de la distributivité dans leurs calculs. Un enseignant cherche par exemple à ce qu'un élève identifie la propriété sur laquelle s'appuie son raisonnement dans un contexte particulier puis il le questionne pour l'amener à utiliser cette propriété avec de plus grands nombres et dans d'autres contextes. Les auteurs constatent que les enfants interrogés amorcent une généralisation de la propriété mais qu'ils ne font pas forcément le transfert lorsqu'une situation nouvelle se présente. Les auteurs considèrent que ce travail sur les relations à travers l'explicitation des propriétés des opérations en arithmétique favorise à la fois la compréhension en arithmétique et en algèbre. Ils recommandent que cette approche vienne compléter le travail conventionnel sur les procédures arithmétiques. L'aisance procédurale reste importante en mathématiques, mais elle inclut plus que de simples automatismes calculatoires. L'aisance procédurale c'est aussi être flexible, savoir quand et comment appliquer des procédures et c'est précisément ce qu'on développe en travaillant la pensée relationnelle. De plus, la réussite en mathématiques repose sur le développement de la compréhension. Or, comprendre il faut faire des liens significatifs entre différentes connaissances et c'est ce qu'offre le travail sur la pensée relationnelle.

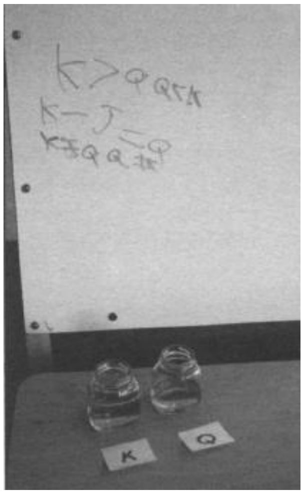
Molina et Mason (2009) montrent que les enfants de 3^{e} année sont capables de mobiliser une pensée relationnelle lorsque les tâches sont bien choisies et qu'on demande des justifications. Ils proposent deux types de tâches : des vrai ou faux pour des phrases mathématiques comportant une égalité données et des équations (opérations à trou). Dans le cas des vrai ou faux, il est demandé de justifier. Pour faire passer les élèves d'une pensée computationnelle à une pensée relationnelle, les égalités sont choisies pour mettre en évidence plusieurs propriétés de l'égalité : réflexivité (27=27), élément neutre (125-0=125), commutativité (10+4=4+10), opérations inverses (100+94-94=100), compensation (13+11=12+12). Les auteurs constatent que les phrases mathématiques qui impliquent des opérations des deux côtés de l'égalité suscitent davantage la pensée relationnelle (dans le cas contraire, les élèves ont plus tendance à effectuer les opérations pour comparer le résultat obtenu au nombre de l'autre côté de l'égalité). Les phrases comportant des grands nombres ont aussi dissuadé les élèves d'effectuer les calculs et donc de raisonner sur les relations. Certaines propriétés, comme la réflexivité et la commutativité sont plus facilement reconnues par les élèves. Les phrases qui impliquent le zéro (a-0=a, a+0=a et a-a=0) ont aussi amené les élèves à des justifications ne s'appuyant pas sur des calculs. L'évolution des élèves à travers une séquence de tâches sur plusieurs mois montre qu'ils sont en mesure de mobiliser une pensée relationnelle. Toutefois, ils ont tendance à revenir régulièrement aux calculs Les auteurs font ainsi remarquer que la culture de la classe et le contrat didactique influencent les stratégies des élèves. Par conséquent, la pensée relationnelle doit être encouragée et favorisée dans la pratique quotidienne de la classe. C'est le cas aussi de la justification qui n'est pas un réflexe pour les élèves. Certains ont en effet tendance à prendre ce qu'on leur apprend à l'école pour des faits qui doivent être retenus et donc à justifier par « parce que c'est comme ça ».

Les visions de Fischer et al. (2019) et rejoignent celles de Blanton, Otálora et al. (2018), Baroody et Lai (2007) et Lai, Baroody et Johnson (2008) et Britt et Irwin (2008). L'approche suggérée est celle d'un travail spécifique en arithmétique permettant de mettre à jour les propriétés des nombres et des opérations sur lesquelles s'appuient les procédés opératoires. Elle s'appuie sur une constante volonté de développer une vision relationnelle de l'égalité et donc d'amener les élèves à percevoir et à manipuler avant tout l'équivalence entre des quantités. Pour Carpenter et al. (2005), la prise de conscience est importante et pour Fischer et al. (2019), comme pour Blanton, Otálora et al. (2018), cette prise de conscience doit se faire à travers l'écriture des expressions équivalentes générées. Ces traces semblent effectivement essentielles pour amorcer une généralisation et donc aller vers l'algèbre. Pour Molina et Mason (2009), pour diriger l'attention des élèves sur les relations et non sur les calculs, il faut à la fois proposer des tâches pour lesquelles l'usage de relations connues s'avère une stratégie plus efficiente que d'effectuer tous les calculs. Il faut aussi que la culture de la classe favorise et valorise ce regard sur les relations sinon les élèves reviennent rapidement aux stratégies calculatoires.

Structure et schématisation de relations

Quelques auteurs proposent de mettre en évidence la structure de différents types de problèmes à l'aide de schématisation et de symboles.

Venanciano et Dougherty (2014) s'appuie sur les travaux de Davydov et défend l'idée qu'aborder les relations et la généralité des propriétés mathématiques dès le début du primaire est possible et même bénéfique sur l'apprentissage de l'arithmétique et de l'algèbre. Les symboles utilisés pour comparer des quantités concrètes observées par les élèves permettent de mettre l'accent sur les relations de comparaison plutôt que sur les nombres eux-mêmes (voir image ci-dessous sur laquelle on voit comment deux quantités d'eau sont comparées).

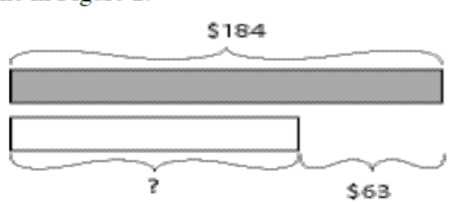


Dans la même veine, Polotskaia et ses collègues (**Polotskaia, Savard et Freiman, 2017, Polotskaia et Savard, 2018, Freiman, Polotskaia et Savard, 2017**) proposent un enseignement de la schématisation et de la symbolisation dès le primaire afin d'amener les élèves à dégager la structure de problèmes additifs. La comparaison des groupes expérimental et groupe témoin montre une meilleur réussite des élèves en résolution de problèmes arithmétiques. Toutefois, l'impact sur les habiletés en résolution de problèmes algébriques n'ont pas encore été mesurés.

Beckmann (2004) considère, quant à elle, que l'apprentissage de la schématisation lors de la résolution de problèmes arithmétiques influence positivement la réussite des élèves en algèbre. Dans cette étude, un enseignement spécifique a été effectué auprès d'élèves de 3e année. La représentation des données du problème et de leurs relations était alors faite à l'aide de diagrammes comme celui-ci :

Meilin saved $184. She saved $63 more than Betty. How much did Betty save? (*Primary Mathematics* volume 3A, page 21, problem 7)

This problem is accompanied by a strip diagram like the one in Figure 2.



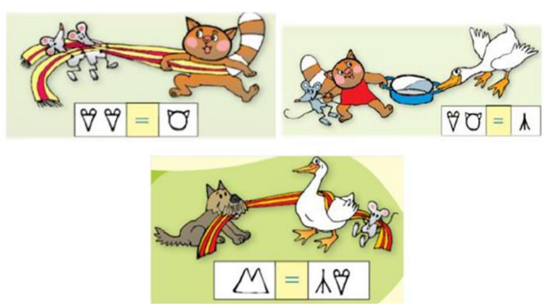
Cette approche utilisée à Singapour est considérée comme efficace dans la mesure où les élèves singapouriens réussissent beaucoup mieux en résolution de problèmes au test international TIMSS effectué en 8e année et donc comportant des problèmes algébriques.

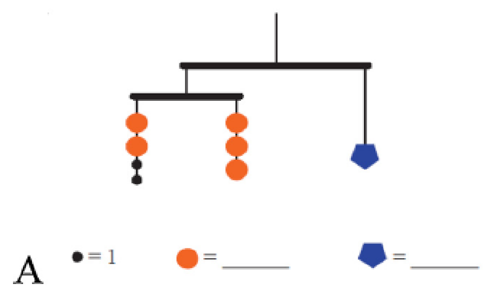
La résolution d'équations

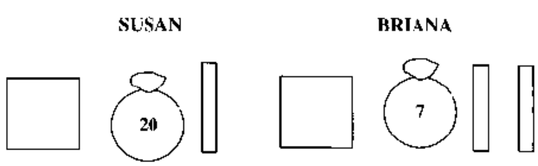
Plusieurs auteurs concentrent le travail du sens de l'égalité autour de la résolution d'équations.

Warren et Cooper (2009) suggèrent de travailler la notion d'équivalence à l'aide du modèle de balance. Ils soutiennent que ce modèle constitue en soi un pas vers l'abstraction.

Ce modèle est aussi présent dans les travaux de Papadopoulos (Papadopoulos et Patsiala, 2019; Papadopoulos, 2019) et de Brizuela et Schliemann (2004) qui présentent des équations sous forme imagée. L'égalité est donc travaillée à travers l'équivalence de deux ensembles d'objets. Les mobiles constituent une variante du modèle de la balance puisque l'objectif est de maintenir l'équilibre.







<u>Les types de tâches</u>

La pensée relationnelle est développée à travers différents types de tâches :

- Problèmes arithmétiques (Freiman et al., 2017; Blanton, Stephens et al., 2015; Poloskaia et al, 2017; Britt et Irwin, 2008; Polotskaia et Savard, 2018)
- Équivalence/sens de l'égalité (Carpenter et al., 2005; Fischer et al., 2019; Hewitt, 2012; Papadopoulos et Patsiala, 2019, Papadopoulos, 2019)

- Propriétés des opérations (Carpenter et al., 2005; Venanciano et Dougherty, 2014)
- Problèmes algébriques (Blanton, Stephens et al., 2015; Beckmann, 2004; Brizuela et Schliemann, 2004)
- Modèle de la balance (Warren et Cooper, 2009)
- Les suites de motifs (Blanton, Stephens et al., 2015; Cooper et Warren, 2008)

Autres références pertinentes sur le sujet

- Baroody, A. J., Purpura, D. J., Eiland, M., D, & Reid, E., E. (2014)
- Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Murphy-Gardiner, A., Stroud, R., Fonger, N. L., & Stylianou, D. (2018)
- Britt, M.S., & Irwin, K.C. (2011)
- Cai, J., Fung Ng, S., & Moyer, J.C. (2011)
- Empson, S. B., Levi, L., & Carpenter, T. P. (2011)
- Frost, J. (2015)
- Knuth, E. J., Alibali, M. W., Mcneil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2011)
- Lee, J.-E. (2006)
- Li, J., Peng, N., & Song, A. (2011)
- McNeil, N. M., Hornburg, C. B., Brletic-Shipley, H., & Matthews, J. M. (2019)
- Ng, S., & Lee, K. (2009)
- Pang J., & Kim J. (2018)
- Russell, S. J., Shifter, D. & Bastable, V. (2011)
- Shifter, D. (2018)
- Stephens, A.C. (2006)
- Tuominen, J., Andersson, C., Björklund Boistrup, L., & Eriksson, I. (2018)
- Xin, Y. (2008)

B. La généralisation de *patterns*

Concepts associés : ordre, répétition, sériation, régularité, suite, nombre généralisé, variable, paramètre, niveaux de généralisation, types de généralisation, conjecture, expression algébrique, formule, règle, loi de formation

Penser algébriquement implique de procéder à des généralisations mathématiques et d'exprimer les généralités produites (Lins et Kaput, 2004 cités par **Yeap et Kaur, 2008**). **Squalli (2015)** distingue ainsi la *généralisation* comme processus et la *généralité* comme le produit de la généralisation. L'activité de généralisation est même considérée par certains mathématiciens comme l'essence des mathématiques (Yeap et Kaur, 2008).

Kaput (1999, cité par **Lannin et al., 2006 et Yeap et Kaur, 2008**) définit la généralisation comme une extension délibérée d'une manière de raisonner ou de communiquer qui va au-delà du ou des cas considérés menant à l'identification et la représentation de généralités communes à tous ces cas. La généralisation constitue ainsi un saut du raisonnement ou de la communication à un niveau où le regard n'est plus porté sur les cas où les situations elles-mêmes mais plutôt sur les modèles, les procédures, les structures et les relations en jeu dans ces situations.

Beaucoup d'auteurs concentrent leurs recherches sur l'exploration des habiletés des élèves du primaire à généraliser et à exprimer la généralité. Les stratégies de ces élèves sont ainsi répertoriées et classées par types ou associées à des niveaux de généralisation (Radford, 2010a; Mulligan et Mitchelmore, 2009; El Mouhayar et Jurdak, 2013).

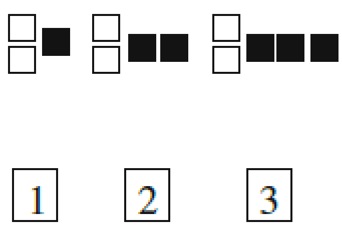
Radford (2010a), par exemple, distingue la généralisation factuelle de la généralisation contextuelle et de la généralisation symbolique. Toutefois, il précise qu'il ne s'agit pas de niveaux de développement mais plutôt de différentes manières de généraliser qui peuvent varier selon les situations présentées aux élèves. Dans la généralisation factuelle, la quantité indéterminée est abordée implicitement à travers les gestes et les mots alors que dans la généralisation contextuelle, la quantité indéterminée est identifiée explicitement dans une verbalisation autonome. La généralisation symbolique est quant à elle l'expression d'une perception globale de l'ensemble de la suite.

De plus, certains auteurs identifient les facteurs qui influencent le type de stratégies mobilisé (Lannin et al., 2006; Yeap et Kaur, 2008). Pour **Lannin et al. (2006)**, ce sont les habiletés cognitives, les interactions sociales et les caractéristiques de la tâche qui influencent le choix de stratégie. **Yeap et Kaur (2008)** décortiquent, quant à eux, les habiletés cognitives en indiquant que la mobilisation de stratégies de généralisation dépend : 1) des habiletés à percevoir les structures et les relations, 2) des connaissances préalables, 3) des stratégies métacognitives, 4) des stratégies de pensée critique, 5) de la capacité à utiliser des moyens d'organisation comme la représentation tabulaire, 6) de la capacité à utiliser des moyens de simplification comme le traitement de cas plus simples, 7) de la familiarité de la tâche, 8) des moyens technologiques disponibles.

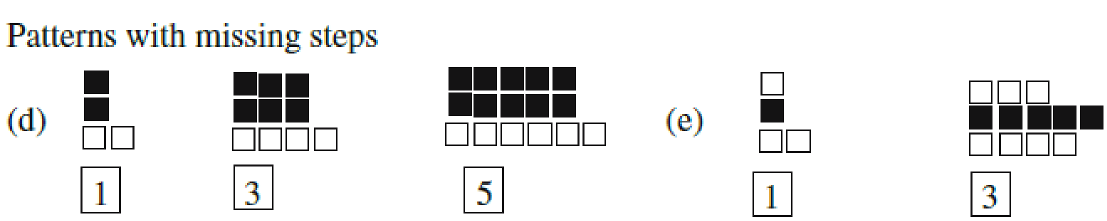
L'observation de suites de motifs ou de nombres est le moyen privilégié par les auteurs pour engager les élèves dans un processus de généralisation. Ce contexte est décrit comme ayant le potentiel de remédier aux difficultés liées au manque de sens donné aux symboles et aux manipulations algébriques. Il est considéré comme une manière de passer du domaine numérique au domaine algébrique offrant la possibilité de donner un sens au symbolisme algébrique référant alors à des quantités concrètes (Lannin et al., 2006).

Dans ce contexte, **Radford (2008)** identifie trois étapes au processus de généralisation : 1) dégager une généralité à partir de quelque termes de la suite, 2) étendre cette généralité à tous les termes de la suite, 3) utiliser cette généralité pour construire une expression permettant de déterminer tout terme de la suite. La plupart des auteurs qui proposent une approche par la généralisation de suites de nombres ou de motifs dans la visée d'un passage du domaine numérique au domaine algébrique visent l'usage d'un symbolisme algébrique par des élèves de la 4e à la 6e année. Le questionnement posé suscite une explication en mots puis la traduction de cette explication dans un registre symbolique (*Écris une règle*).

En ce qui concerne les caractéristiques des tâches favorisant la généralisation, plusieurs auteurs considèrent que la perception de la structure est facilitée par le registre figural et donc dans le contexte de suite de motifs (Houssart et Evens, 2003). De plus, il est admis que la réduction numérique sous forme de table de valeurs d'une telle suite rend la tâche plus difficile (Warren et Cooper, 2008). En fait, cette manière de procéder incite les élèves à se concentrer sur les variations individuelles des deux quantités et freine la production d'une règle de correspondance entre ces deux quantités.
Warren et Cooper (2008) suggèrent d'utiliser un matériel concret pour aider les élèves à construire les motifs manquants dans une suite. Ils suggèrent aussi de proposer des motifs pour lesquels le lien entre la position et la structure du motif est facilement décelable, ainsi la mise en évidence du lien entre le rang et le terme est facilitée. L'usage de la couleur ou de procédé visuel pour mettre en évidence la structure des motifs s'avère aussi fructueux. Par exemple, des tuiles blanches sont utilisées pour représenter la partie invariante du motif et des tuiles noires pour la partie variable (voir figure).



La présentation de motifs qui sont pas consécutifs (des motifs sont manquants, voir figure) semble aussi permettre aux élèves de se concentrer davantage sur le lien entre le rang et le terme et ainsi dégager une règle de correspondance.



Par ailleurs, l'expression verbale de la généralité constitue une étape cruciale dans le processus de généralisation (**Rivera et Becker, 2008**) et cette verbalisation semble plus facile à l'oral qu'à l'écrit (**Warren et Cooper, 2008**). Favoriser les échanges entre les élèves lors de la construction d'une règle (en mots ou algébriquement) est une pratique prometteuse particulièrement pour inciter les élèves à justifier et à dégager clairement la structure des motifs (**Nacarato et al., 2017**). Les gestes et l'environnement physique jouent aussi un rôle important dans le processus de généralisation. Lorsque les enfants s'impliquent physiquement dans la construction de la suite, dans le déplacement d'un terme à l'autre, etc., ils perçoivent mieux la séquence et la structure des motifs (ce qui change et ce qui reste pareil) (**Ferrara et Sinclair, 2016**).

Malgré la richesse des situations proposées, quelques difficultés sont identifiées. Par exemple, lorsque les élèves établissent une manière de déterminer le terme à partir du rang, ils ont de la difficulté à interpréter la relation dans le sens inverse (pour déterminer le rang à partir du terme) (Warren et Cooper, 2008). Houssart et Evens (2003) constatent aussi que certains élèves utilisent des symboles mais n'expriment pas de généralité alors qu'à l'inverse, d'autres ne sont pas en mesure d'utiliser des symboles mais dégagent clairement une généralité en s'appuyant sur la structure des motifs. L'usage d'un symbolisme n'est donc pas garant d'un processus de généralisation accompli.
Toutefois, les difficultés rencontrées par les élèves du primaire dans les tâches de généralisation suggérées sont les mêmes que celles observées chez les élèves du secondaire. Ce constat laisse penser que l'origine des difficultés n'est pas développementale mais plutôt expérientielle (Warren et Cooper, 2008).

Pour plusieurs auteurs (Lannin et al., 2006; Blanton et al., 2017; Wilkie, 2016), le processus de généralisation implique l'observation de quantités variables et la description des relations entre ces quantités. Ainsi, les tâches de généralisation de motifs sont abordées dans une perspective fonctionnelle.

Les types de tâches

La plupart des auteurs proposent un travail sur des suites de motifs donc un ancrage visuel pour favoriser la perception de la régularité et de la structure. Certains se concentrent sur un registre de représentation en particulier comme la construction d'une règle en mots (Warren et Cooper, 2008) ou algébrique (Moss et Beatty, 2006; Rivera et Becker, 2008). Alors que d'autres visent l'exploitation de différents registres de représentation (Houssart et Evens, 2003; Cooper et Warren, 2008). Dans ce même contexte, Nacarato et al. (2017) observent le rôle de l'interaction verbale et Ferrara et Sinclair (2016) décrivent le rôle des gestes et du matériel de manipulation dans l'expression de la généralité.

Quelques auteurs suggèrent un travail sur des suites de nombres (Ferrara et Sinclair, 2016; Fujita et Yamamoto, 2011; Bills et al.,2005) ou proposent un passage de la suite de motifs à la suite numérique (Yeap et Kaur, 2008).

Autres références pertinentes sur le sujet

- Bills, L., Ainley, J., & Wilson, K. (2006)
- Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2018)
- Chua, B. L., Hoyles, C., Mavrikis, M., & Geraniou, E. (2009)
- Collins, M. A., & Laski, E. V. (2015)
- Cooper, T.J., & Warren, E. (2011)
- Demonty, I., Vlassis, J., & Fagnant, A. (2018)
- Yeşildere İmre, S., & Akkoç, H. J (2012)
- Callejo et Zapatera, 2017
- El Mouhayar, R. E. (2018)
- El Mouhayar, R. R. E., & Jurdak, M. E. (2013)
- Lüken, M. M., & Kampmann, R. (2018)
- Pasnak, R. (2017)
- Radford, L. (2010b, 2011)
- Rivera, F.D., & Becker, J.R. (2011)
- Steele, D. (2008)
- Strachota, S., Knuth, E., & Blanton, M (2018)
- Twohill, A. (2018)
- Vlassis, J., Demonty, I., & Squalli, H. (2017)
- Wijns, N., Torbeyns,J., De Smedt, B., & Verschaffel, L. (2019)
- Zazkis, R., Liljedahl, P., & Chernoff, E.J. (2008)

C. La pensée fonctionnelle

Concepts associés : quantité variable, variation, covariation, relation, dépendance, correspondance, généralisation, règle, fonction linéaire, fonction affine

Pour certains auteurs, l'algèbre est un outil pour décrire et analyser les relations (Usiskin, 1988 cité par **Wilkie, 2016**). Un élément clé de l'algèbre scolaire est donc l'étude des relations entre des quantités et des variables qui représentent des quantités variables. **Smith et Thompson (2008)** décrit la pensée fonctionnelle comme une manière de se représenter et de raisonner sur la relation entre deux (ou plus) quantités variables. Plus spécifiquement, il s'agit de passer de relations spécifiques entre des valeurs prises par des quantités à la généralisation de la relation entre ces quantités à travers une multiplicité de valeurs. Pour Smith et Thompson (2008) la pensée algébrique émerge de la création ou de l'utilisation de représentations appropriées pour représenter la généralisation de cette relation entre des variables. Dans le même ordre d'idée, **Blanton et al. (2015)** indiquent que la pensée fonctionnelle comprend différentes actions : a) généraliser des relations entre des quantités covariantes; b) représenter et justifier ces relations de différentes manières (langage naturel, notation algébrique, tables de valeurs et graphiques); c) manipuler avec fluidité ces représentations dans le but de comprendre et de prédire des comportements fonctionnels.

La plupart des auteurs qui abordent la notion de fonction ou la pensée fonctionnelle comme porte d'entrée dans l'algèbre au primaire le font par l'activité de généralisation de suites de motifs ou de nombres. Celle-ci est effectivement envisagée à travers les habiletés à déceler les relations entre deux quantités variables inter reliées dans une situation et à exprimer ces relations de manière générale. **Blanton et Kaput (2005a)** décrivent trois manières d'analyser les suites de motifs ou de nombres : 1) *dégager le modèle récursif* qui inclus de trouver une manière de varier à travers une séquence de valeurs; 2) *adopter une pensée covariationnelle* basée sur l'analyse de comment deux quantités varient simultanément et conserver la description de cette façon de varier comme composante explicite et dynamique de la fonction; 3) *dégager une relation de correspondance* basée sur l'identification d'une corrélation entre deux variables.

À partir de l'analyse du raisonnement d'enfants de 6 ans (1e année), Blanton, Brizuela et al. (2015) décrivent différents niveaux de compréhension de la relation fonctionnelle. Ils constatent par exemple que la plupart des enfants interrogés sont capables de mobiliser un raisonnement fonctionnel primitif en considérant plusieurs cas de correspondance entre les valeurs prises par deux quantités observées. Par contre, la relation n'est pas généralisée pour toute valeur ni justifiée. L'enfant observe, constate mais n'explique pas. Ils distinguent aussi deux types de relations : la relation récursive et la relation fonctionnelle et supposent, *a priori*, que la première précède spontanément la seconde. Toutefois, les résultats obtenus démontrent que les enfants peuvent observer l'une ou l'autre des relations mais que la relation récursive ne semble pas forcément supporter la relation fonctionnelle. En fait, les enfants ayant observé les relations récursives ont mobilisé un raisonnement moins sophistiqué puisque le questionnement était orienté pour attirer l'attention sur la relation fonctionnelle. Ainsi, les auteurs soulignent qu'il serait important de construire des tâches qui permettent de faire progresser à travers la généralisation, la justification et la représentation de relations récursives. Ils notent aussi que la supposition selon laquelle le travail approfondi sur les suites de nombres ou de motifs visant l'observation de la variation d'une seule quantité doit forcément précéder le travail sur les relations entre deux quantités covariantes doit être remise en question. En effet, il n'apparait pas nécessaire que la compréhension de la variation d'une quantité soit approfondie avant d'explorer les relations entre deux quantités. Finalement, les auteurs recommandent ainsi que l'enseignement élémentaire ne vise pas la maitrise de concepts particuliers mais vise plutôt de donner l'opportunité aux enfants d'interagir avec des situations et des représentations variées dans lesquelles des quantités covariantes sont mises en relation.

Tanisli (2011) considère que les suites de nombres constituent un outil puissant pour développer la compréhension des relations de dépendance entre des quantités elle-même à la base de la notion de fonction. Il considère aussi que ce contexte est propice à l'introduction de la notation algébrique et à la distinction entre la quantité variable, l'inconnue et le paramètre. Cette confrontation précoce des différents sens de la lettre en algèbre permet aussi de confronter d'emblée les conceptions inadéquates, comme celle de la lettre objet par exemple, et de ne pas restreindre les expériences des élèves aux situations dans lesquelles la lettre remplace un nombre inconnu. À la suite d'une expérimentation avec des élèves de 5e année visant l'étude de deux suites de nombres mis en correspondance dans une table de valeurs (fonction affine), il décrit différentes mises en œuvre des stratégies anticipées (celles de Blanton et Kaput, 2005a). Il constate que les bonds constants de la première suite de valeurs (variable indépendante) a fortement incité les élèves à dégager un modèle récursif prenant en compte les valeurs de la deuxième suite (la variable dépendante). Toutefois, plusieurs élèves ont cherché à construire une relation de correspondance entre les deux séries de valeurs en recourant à une suite intermédiaire (les différences entre les valeurs qui se correspondent). Cette stratégie originale a permis de dégager une règle de correspondance intermédiaire exprimée en mots. L'auteur constate aussi que la mise en relation entre les accroissements constants des deux suites (covariation) a permis aux élèves de dégager une constante (l'accroissement constant de la variable dépendante) et ainsi d'envisager l'existence et la nature d'une règle de correspondance. Cette règle exprimée maladroitement et à l'aide d'un symbolisme naturel constitue une amorce intéressante pour poursuivre le travail sur la fonction. L'auteur conclut que les perspectives par la covariation et par la correspondance sont complémentaires et que les enfants sont capables de les articuler. Il recommande ainsi de solliciter ces deux perspectives dès le début du développement d'une pensée fonctionnelle.

Les types de tâches

Comme mentionné précédemment, les suites de motifs constituent l'une des entrées dans la pensée fonctionnelle (Blanton et al. 2017; Carraher et al., 2008; Cooper et Warren, 2008; Wilkie, 2016; Wilkie et Clarke, 2016). Mais d'autres types de situations sont aussi suggérées : des problèmes arithmétiques (Blanton et al., 2017), des situations de covariation pour travailler la dépendance (Blanton, Brizuela et al., 2015; Heuvel-Panhuizen et al., 2013) et des tâches abordant l'idée de fonction-machine (Cooper et Warren, 2008; Moss et McNab, 2011).

Autres références pertinentes sur le sujet

- Barrett, J.E., Cullen, C., Sarama, Clements, D. H., Klanderman, D., Miller, A.L., Rumsey, C. (2011)
- Blanton, M. L., & kaput, J. J. (2005b, 2011)
- Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., & Gardiner, A. M. (2015)
- Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Blanton, M. (2016)
- Carraher, D., Schliemann, A., & Brizuela, B. (2005)
- Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2018)
- Corral, D., Quilici, J. L., & Rutchick, A. M. (2019)
- Ellis, A.B. (2011)
- Mata-Pereira, J., & Ponte, J.-P. D. (2017)
- Molina M., Ambrose R., & del Rio A. (2018)
- Steele, D. (2008)

IV. Les concepts et les pratiques mathématiques racines pour le développement de la pensée algébrique

A. Le sens de l'égalité

Les difficultés des élèves avec le sens de l'égalité

Fischer et al. (2019) décrivent le signe d'égalité comme un indicateur d'équivalence. Les propriétés de base de l'égalité, soient la réflexivité (a = a), la symétrie (si a = b alors b = a) et la transitivité (si a = b et b = c alors a = c) sont ainsi à la base de la compréhension de la notion d'équivalence. Mais la simple propriété de symétrie n'est pas si triviale pour des élèves du primaire qui voient le signe d'égalité comme l'indication d'un calcul à effectuer de la gauche vers la droite. Pour Fischer et al. (2019) cette conception du signe d'égalité est problématique car elle engendre plusieurs difficultés. Premièrement, les élèves ont de la difficulté à effectuer des décompositions, soit à briser un nombre pour l'écrire sous forme d'une somme. Ainsi, écrire 7 = 4 + 3 n'a pas de sens pour eux et ils ne penseront pas à décomposer un nombre pour simplifier les calculs (par exemple, 3 + 4 = 3 + 3 + 1, effectuer 3 + 3 en premier lieu est plus facile). Deuxièmement, ils effectuent systématiquement les calculs même lorsque cette stratégie n'est pas efficiente (par exemple pour comparer 825 + 57 et 825 + 56). Troisièmement, cette conception nuit à la compréhension du lien entre une addition et une soustraction. L'élève qui voit 866 – 128 comme un calcul à effectuer de gauche à droite ne pensera pas à chercher un nombre qui ajouté à 128 donne 866. Cette conception limitée du signe d'égalité constitue par la suite un obstacle en algèbre puisque les manipulations algébriques sont basées sur l'équivalence entre les deux côtés de l'égalité.

Carpenter et al. (2005) indiquent que cette façon de concevoir l'égalité est à l'origine d'erreurs fréquentes lors de la complétion d'une équation du type 8 + 4 = __ + 5. Certains élèves complètent avec 12 puisque 8 + 4 = 12. D'autres indiquent 17 puisqu'ils ajoutent ensuite 5 à 12. Ils comprennent ainsi qu'ils doivent opérer de gauche à droite.

<u>Les différents sens de l'égalité…articuler les différents sens ou ne développer que le sens nécessaire en algèbre?</u>

Pour certains auteurs, les élèves de niveau primaire ne sont probablement pas en mesure de comprendre le sens relationnel du signe d'égalité puisque leur stade développemental ne leur permet pas de gérer le niveau d'abstraction nécessaire (Collis, 1974). **Blanton, Otálora et al. (2018)** considèrent quant à eux que la conception développée reflète plutôt le contenu et les manières de faire dans l'enseignement habituel. La prépondérance de l'écriture d'une équation arithmétique avec un signe d'opération dans le membre de gauche et un résultat dans le membre de droite couplée à une instruction traditionnelle qui ne met pas l'accent sur un raisonnement relationnel débouche sur une conception opérationnelle du signe d'égalité. Blanton, Otálora et al. (2018), émettent l'hypothèse qu'en développant une vision relationnelle dès la maternelle, soit avant l'enseignement formel du signe d'égalité, il serait possible de contrer le développement d'une vision opérationnelle qui semble apparaitre dès la 1^{e} année. Ils semblent ainsi considérer que la vision opérationnelle doit simplement être remplacée par la vision relationnelle dès la maternelle. Ce point vue transparait aussi chez **Fischer et al. (2019)** qui se questionnent sur la possibilité de développer une conception adéquate du signe d'égalité qui éviterait que les élèves l'interprètent comme l'indication d'un calcul à effectuer. Il est aussi exprimé par **Warren et Cooper (2009)** qui indiquent que le signe d'égalité devrait être interprété comme l'indication que deux quantités sont les mêmes.

<u>Les stratégies et les principes à travailler</u>

En général, l'idée est d'amener les élèves à reconsidérer le sens de l'égalité (Stephens et al., 2013) en abordant différents principes :

- Classer, organiser, associer, trier, ordonner des quantités ou des attributs (Lee, Collins et Melton, 2016)

- Décomposition (Blanton, Otálora et al., 2018)

- Compensation (Britt et Irwin, 2008)

- Principe de l'inverse (Lai et al., 2008; Baroody et Lai, 2007)

- Propriétés des opérations (Carpenter et al, 2005)
- Modèle de la balance (Warren et Cooper, 2009) ou les mobiles (Papadopoulos, 2019)
- Justification de la validité ou l'invalidité de différentes égalités (Molina et Mason, 2009; Stephens et al., 2013) VRAI ou FAUX
- Phrases mathématiques trouées à compléter (Molina et Mason, 2009; Stephens et al., 2013)

<u>Les activités proposées</u>

Voir guide pour les intervenants du milieu scolaire.

<u>Autres références pertinentes sur le sujet</u>

- Powell, S. R., & Fuchs, L. S. (2010)
- Schwarzkopf, R., Nührenbörger, M., & Mayer, C. (2018)

B. Les quantités variables et la covariation

À la base de la pensée fonctionnelle se situent les notions de quantité variable et de de covariation. La perception de la nature covariante des relations fonctionnelles est ainsi considérée comme un élément crucial dans le développement de la pensée algébrique (Wilkie, 2019). Le raisonnement covariationnel et la compréhension des relations fonctionnelles représentées graphiquement sont nécessaires à l'utilisation de l'algèbre comme outil puissant dans différents domaines (sciences, économie, ingénierie). Une vision de la fonction sous l'angle de la covariation est aussi à la base de la compréhension de plusieurs notions mathématiques telles les proportions, le taux de variation, la linéarité, la trigonométrie et la croissance exponentielle (Wilkie, 2019).

Les situations familières et concrètes sont propices à un travail sur les quantités variables et la covariation. Les situations de généralisation de figures présentant des régularités sont particulièrement adaptées pour l'initiation à l'usage d'un symbolisme pour représenter les quantités variables (Radford, 2010 cité par Wilkie, 2016).

C. Les modèles et les structures

Pasnak et al. (2009) identifient trois habiletés favorisant la littératie et la numératie qui peuvent être travaillées dès le préscolaire : percevoir une sériation, identifier des intrus dans une collection, et comprendre le principe de conservation du nombre. Ces trois habiletés sont particulièrement utiles dans le contexte de généralisation de suites de motifs puisqu'elles sont essentielles à la compréhension de la notion de suite, mais aussi à l'identification de similarités et de différences entre les termes de la suite et donc à la perception d'une structure. Dans le même ordre d'idée, **Nacarato et al. (2017)** ont construit des tâches pour travailler les notions d'ordre et de régularité. Puis, ils visaient l'émergence d'un questionnement de manière à ce que les élèves parviennent à déterminer la loi de formation de la suite.

Les activités de généralisation de suites de motifs ou de nombres demandent généralement aux élèves de 1) continuer une suite, 2) déterminer un terme éloigné dans la suite, 3) déterminer une règle générale, permettant de déterminer n'importe quel terme connaissant son rang dans la suite, en mots ou algébriquement. (voir exemples dans le guide pour les intervenants).

Certains auteurs proposent d'aller plus loin en demandant aux élèves d'interpréter la règle trouvée ou d'interpréter une autre règle pour la même suite. Ainsi ils cherchent à ce que l'élève exploite la figure donnée et donc qu'il s'appuie sur la structure du motif pour justifier la validité de la règle.

Dégager la structure commune à un ensemble de motifs constitue l'un des principaux obstacles à la généralisation. **Wilkie (2016)** propose de demander aux élèves d'utiliser de la couleur pour mettre en évidence la structure des motifs et distinguer ce qui change de ce qui reste pareil.

La tendance à observer uniquement la récursivité engendrée par la comparaison de motifs successifs dans une suite peut être contrée par des tâches qui incitent davantage l'observation de la correspondance entre le rang et le terme de la suite ou alors entre deux quantités. **Houssart et Evens (2003)** proposent du jumeler plusieurs représentations en ajoutant une table de valeurs en parallèle de la suite de motifs. Ainsi, les élèves sont orientés vers la prise en compte de deux quantités variables.

Wilkie et Clarke (2016), quant à eux, proposent des motifs qui ne sont pas ordonnés. Ainsi, l'élève est incité à observer les quantités mises en évidence par des couleurs : le nombre de carreaux blancs et le nombre de carreaux noirs. Cette variante fait en sorte qu'on n'a plus à se référer à la position du motif dans une suite, on favorise donc davantage la mise en relation de deux quantités variables.

D. La notation algébrique

Pour Mason (2008) (dans **Wilkie, 2016**), la généralisation et la symbolisation sont deux processus qui s'influencent mutuellement dès le jeune âge.

Smith et Thompson (2008) définissent la pensée fonctionnelle à travers la compréhension des notions de changement et de quantités variables mais aussi de l'usage d'un symbolisme littéral permettant de représenter la relation entre ces quantités. Wilkie (2016) considère que l'usage de ce symbolisme, coordonné à celui de représentations graphiques est accessible aux élèves du primaire. Toutefois, dans son étude, seulement la moitié des 106 élèves ont été mesure de faire cet usage. Ainsi, le symbolisme littéral comme moyen de représenter la généralisation des relations de dépendance entre des variables n'apparait pas suffisamment spontanément pour que l'on considère qu'il émergera de lui-même.

V. Les facteurs de réussite des élèves en algèbre : d'autres pistes

Lee et al. (2018) ont mis en évidence les liens entre la réussite en résolution de problèmes algébriques et la réussite de tâches de types « relationnelles », la résolution de problèmes arithmétiques, la mémoire de travail et le fonctionnement exécutif. Ils considèrent que les tâches sur les suites numériques et la fonction sont particulièrement adaptées pour travailler sur les relations entre des quantités et que ce travail sur les relations initie les enfants à la représentation et à l'usage du langage qui pourra soutenir la pensée algébrique.
D'après les résultats de cette étude, parmi tous les facteurs mesurés, **seule l'habileté relationnelle semble avoir un impact significatif dans la réussite des problèmes algébriques**. Le QI n'a aucun impact sur la résolution des problèmes algébriques, par contre il semble avoir un impact sur la résolution de problèmes arithmétiques. Les élèves qui réussissent (au –dessus de la moyenne) autant dans les tâches arithmétiques que relationnelles réussissent aussi mieux les tâches algébriques l'année suivante. Les élèves qui réussissent bien (au –dessus de la moyenne) dans l'une ou l'autre dimension réussissent aussi mieux les tâches algébriques. Par contre, les élèves qui réussissent le mieux les tâches arithmétiques semblent moins bien réussir les tâches relationnelles l'année suivante. Pour les auteurs cela pourrait s'expliquer par le fait que les élèves qui sont forts en arithmétique ont tendance à faire usage à outrance de leurs capacités en calcul et que par conséquent ils mettent moins d'effort sur l'identification des régularités sur lesquelles reposent les patterns observés dans les tâches relationnelles. De plus, les élèves qui sont très habiles en arithmétique développent des habiletés opérationnelles qui les empêchent peut-être de passer à un niveau structurel. De manière générale, les élèves qui réussissent bien, réussissent bien partout ce qui empêche d'identifier clairement les facteurs de réussite.

Les auteurs concluent que le lien entre les habiletés relationnelle et algébrique est peut-être dû à la nature des tâches relationnelles qui suggèrent des représentations qui engagent les élèves dans des activités de généralisation et qui demandent de penser à la structure des relations entre les quantités. Le développement des compétences dans les tâches relationnelles en complément des pratiques algébriques habituelles semble bénéfique, les habiletés en calcul arithmétique étant un préalable insuffisant pour la réussite en algèbre.

En comparant les taux de réussite et la nature des stratégies d'élèves chinois et singapouriens lors de la résolution de problèmes de vitesse, **Jiang, Hwang et Cai (2014)** mettent en évidence le lien entre certaines habiletés arithmétiques et algébriques. Les élèves chinois qui mobilisent des stratégies algébriques réussissent généralement mieux mais leur performance est basse à certains problèmes pour lesquels ils ne fournissent aucune réponse. En fait, il semble que lorsque les stratégies algébriques apprises ne peuvent être directement mobilisées, les élèves chinois ne disposent pas d'autres stratégies. À l'inverse, la variété des stratégies arithmétiques des élèves singapouriens leur permet de résoudre divers problèmes de vitesse même les plus difficiles.

Mulligan et Mitchelmore (2009) décrivent des niveaux de conscience des modèles et structures mathématiques (AMPS : Awareness of Mathematical Pattern and Structure) chez des élèves de 1^{e} année. L'analyse des productions de ces élèves a permis d'établir 4 niveaux de perception de la structure : Pré-structurelle (11%), Émergent (38%), Partiellement-structurelle (27%) et Structurelle (24%). Une forte corrélation a été établie entre le niveau de perception de la structure et la réussite générale du test PASA. Aussi, chaque élève semble maintenir le même niveau AMPS peu importe la tâche, ce qui permet de conclure que cette classification est pertinente pour caractériser la compréhension. Pour les auteurs, les résultats indiquent que le niveau AMPS peut permettre de prévoir la réussite en mathématique et plus spécifiquement en algèbre. Cette classification, qui permet de décrire la compréhension approfondie plutôt que les habiletés procédurales, offre une lunette nouvelle pour l'investigation du développement de la pensée algébrique précoce.

Corral et al. (2019) s'intéressent à la capacité de transfert lors de la résolution de problèmes complexes. Ils distinguent deux approches : l'une qui vise l'apprentissage de stratégies de résolution et l'autre qui vise la représentation de la structure. Ils considèrent que l'apprentissage visant la représentation de la structure doit précéder celui qui vise l'apprentissage de stratégies de résolution. D'un autre côté, ils comparent deux manières d'envisager la « pratique » : 1) faire faire des problèmes ou 2) donner plusieurs exemples résolus. Ils mentionnent que pour être habiles à dégager la structure d'un problème il faut voir plusieurs problèmes dont la structure est semblable. Ce type de pratique permet de réduire la charge cognitive qui est élevée en situation de résolution de problèmes. Mais le transfert ne s'effectue ensuite que sur des tâches semblables dans lesquelles les problèmes ont une structure identique.

Une expérimentation sur une population adulte a été menée et l'analyse visait à évaluer les capacités de transfert proche et éloigné dans différents cas de figure (comparaison de 4 groupes). Le transfert proche consiste en une application quasi-directe des procédures de résolution dans la mesure où la structure des problèmes est semblable. À l'inverse un transfert éloigné est effectué lors de la résolution d'un problème dont la structure est différente même si les quantités impliquées sont de même nature. Ainsi, même si les quantités impliquées dans les problèmes sont les mêmes, les liens entre ces quantités peuvent être différents.

À partir des analyses des données collectées, les auteurs concluent que l'entrainement sur la construction de schémas avant l'introduction de stratégies de résolution et l'utilisation de plusieurs exemples peut aider l'apprentissage. Les bénéfices de chacune de ces approches ont été observés sur le transfert proche et éloigné. Pour les étudiants ayant complété un entrainement à la construction de schémas en premier, deux mécanismes peuvent expliquer ces effets : soit ils ont développé une compréhension conceptuelle plus profonde des problèmes, soit leurs capacités cognitives étaient davantage disponibles pour la résolution de problèmes. Ces deux facteurs sont reconnus pour faciliter le transfert (Cooper et Sweller, 1987 cité par Corral et al., 2019).

Les auteurs remarquent aussi que lorsque l'entrainement sur la construction de schémas est effectué après l'entrainement sur les stratégies de résolution, son impact est moindre. En fait, les participants semblent moins enclins à distinguer les informations pertinentes de celles qui ne le sont pas. Ils constatent aussi que les exemples de problèmes résolus permettent favorisent davantage la réussite que la résolution de problèmes elle-même. Ils supposent que les exemples résolus évitent la surcharge cognitive en permettant à l'apprenant de se concentrer sur certains aspects du problème, par exemple sa structure. L'usage des exemples semble aussi favoriser la compréhension de la structure relationnelle du problème en amont de la résolution. Ce constat est cohérent avec les résultats de précédentes recherches qui montrent que l'usage d'exemples peut être plus bénéfique que la pratique de la résolution de problèmes pour le transfert proche (Ward et Sweller, 1990; Rittle-Johnson, 2006). Il est ici montré que cette approche a aussi un impact positif sur le transfert éloigné. L'usage élargi des exemples résolus semble aussi améliorer le sentiment d'auto-efficacité qui lui joue un rôle important dans la réussite (Dweck, 1986).

Aussi, les auteurs recommandent de revoir la séquence habituelle orientée sur l'apprentissage de stratégies de résolution puis la résolution de problèmes. Ils proposent deux avenues : 1) un entrainement précoce à la représentation à l'aide de schémas pour mettre en évidence la structure, et 2) un usage plus élargi d'exemples résolus.

Note : Les résultats ne sont pas surprenants mais les problèmes proposés (même ceux qui exigeaient un transfert éloigné) étaient des problèmes d'application. Il est à prévoir que *les recommandations données ne soient pas adaptées pour développer la compétence 1 (résolution de problèmes).*

VI. L'intégration d'un travail algébrique au préscolaire et au primaire : différentes perspectives

Traditionnellement l'algèbre est envisagée comme une suite logique à l'arithmétique. Il est ainsi assumé que la pensée arithmétique est un préalable à l'émergence et au développement de la pensée algébrique (Radford, 2014). Plusieurs auteurs suggèrent ainsi d'amorcer le développement d'une pensée algébrique dès la fin du primaire conservant ainsi le principe d'une algèbre qui s'appuie sur les connaissances arithmétiques considérées comme préalables. Toutefois, les initiatives actuelles favorisent une articulation entre les deux domaines de travail en misant sur leurs points communs et leurs différences. On retrouve dans cette perspective les travaux de Carpenter et al. (2005) qui suggèrent de développer une pensée relationnelle dans un cadre arithmétique au primaire puis dans un cadre algébrique au secondaire. La pensée relationnelle apparait ainsi comme un fil directeur qui favorise le passage de l'arithmétique à l'algèbre. En misant sur la conscientisation de la structure des relations arithmétiques entre différentes quantités, on amène notamment l'élève à dégager et généraliser des propriétés. Ces propriétés ainsi que la manière de les aborder (la généralisation) constituent le pont entre l'arithmétique et l'algèbre.

Warren et Cooper (2009) considèrent que l'algèbre est un système abstrait qui reflète les structures arithmétiques et les représentations de ces structures. L'algèbre apparait alors comme une sorte d'arithmétique généralisée avec deux dimensions centrales : les relations et le changement. Les opérations sont alors vues soit de manière relationnelle ou statique, soit de manière transformationnelle ou dynamique. Pour ces auteurs, d'un côté l'arithmétique constitue un support à la pensée algébrique et de l'autre la pensée algébrique est nécessaire à la compréhension de l'arithmétique. Par conséquent, les deux domaines sont interreliés et se nourrissent l'un l'autre. Ils suggèrent aussi que le passage du concret (modèle physique) à l'abstrait (manipulation algébrique) s'effectue à travers plusieurs modèles (par exemple la balance et les segments pour la résolution d'équation) et diverses représentations de ces modèles (par exemple, la balance peut être expérimentée physiquement par les élèves avec des sacs d'épicerie, avec une vraie balance à plateaux, avec un schéma de la balance, etc.) dans la mesure où une séquence de progression est judicieusement conçue. Ils considèrent effectivement que la comparaison des différents modèles et la mise en évidence des similitudes permettent l'émergence du modèle mental abstrait.

Pour d'autres auteurs, les développements des pensées arithmétique et algébrique doivent être traités en simultané. Pour certains, cela implique de les aborder en parallèle dès le début du primaire (Blanton, Stephens et al., 2015). Alors que pour d'autres, il s'agit de les articuler pour favoriser un maillage des habiletés et connaissances développées.

Finalement, quelques auteurs considèrent que la logique arithmétique/algèbre qui implique un travail exclusif dans le spécifique (arithmétique) pour passer ensuite vers le général (algèbre) limite les apprentissages. Pour eux, les principes algébriques sont à la base des mathématiques et les enfants sont capables de percevoir les structures et les relations entre différentes quantités avant d'opérer avec ces quantités. Cette perspective qui peut sembler aller à l'encontre du développement cognitif de l'enfant est adoptée par les écoles russes et elle permet de développer des habiletés en résolution de problèmes.

VII. Recommandations pour l'enseignement

Radford (2014) considère qu'on ne peut pas s'engager dans un travail algébrique précoce si on n'a pas une idée claire de ce qui différencie l'arithmétique de l'algèbre. Il est ainsi important de pouvoir reconnaitre l'usage de lettres non associé à un raisonnement algébrique et à l'inverse, les représentations non-conventionnelles, sans symbolisme littéral témoignant d'un raisonnement algébrique.

Carpenter et al. (2005) recommandent de travailler la pensée relationnelle en permettant aux élèves de prendre conscience, d'expliquer et de décortiquer les propriétés des opérations sous-jacentes aux procédures arithmétiques qu'ils appliquent ou aux autres stratégies de calcul qu'ils utilisent. Ils suggèrent aussi de conserver un travail procédural mais de l'enrichir en permettant aux élèves de comprendre ce qu'ils font. Ainsi, on doit viser à la fois le développement d'habiletés calculatoires et d'une compréhension du sens pour favoriser l'aisance et la flexibilité.

Cooper et Warren (2008) et **Warren et Cooper (2009)** s'appuient sur les propos de Dreyfus (1991) et Duval (2002) pour prôner une approche favorisant l'usage et la coordination de plusieurs représentations. Ils considèrent qu'un seul modèle ou système de représentation ne suffit pas, que la comparaison et la transition entre différents systèmes ou modèles permet l'émergence de la pensée algébrique. Ils proposent ainsi différentes représentations visuelles (registre figural) pour travailler différents aspects ou notions algébriques (généralisation de patterns, balance et équation, fonction-machine, compensation avec l'addition). Les élèves sont d'abord invités à exprimer leurs solutions verbalement (discussions en grand groupe) puis à l'écrit. Après un enseignement orienté sur l'usage de représentations visuelles, ils constatent que les élèves s'engagent plus facilement dans les tâches et qu'ils comprennent mieux ce qu'ils font. Par exemple, pour la généralisation de patterns, ils constatent que l'analyse de la représentation visuelle (suite de motifs) favorise l'identification de régularités et aide les élèves à construire une règle (Cooper et Warren, 2008). Toutefois, ils rappellent l'importance de coordonner les différentes représentations en jeu notant que la représentation visuelle à elle seule ne suffit pas. Ils font aussi remarquer que les interventions de l'enseignant sont essentielles pour que les élèves se détachent des modèles (comme la balance) et accèdent à une notion abstraite (Warren et Cooper, 2009). Ils suggèrent par ailleurs d'avoir recours à plusieurs modèles pour favoriser la compréhension des procédures complexes. Par exemple, pour résoudre des équations linéaires il faut voir le signe d'égalité comme une balance et comprendre les opérations inverses. En plus du modèle de la balance, les auteurs proposent de travailler l'équivalence avec une représentation sous forme de segment et la notion d'opération inverse à l'aide d'une droite numérique. Pour que l'usage de modèles soit efficient, ceux-ci doivent être liés à des situations concrètes à travers le langage, les actions kinesthésiques et la visualisation. L'engagement physique des élèves dans l'expérimentation concrète permet une meilleure visualisation mentale des principes sous-jacents. Par exemple, pour le modèle de la balance, les enfants de 2^{e} année ont pu incarner eux-mêmes le système en tenant des sacs d'épicerie (un dans chaque main) dans lesquels les items étaient ajoutés ou retirés. On leur demandait alors de dire si la balance était selon eux en équilibre ou non et pourquoi. L'efficience du modèle repose aussi sur la séquence de représentations proposée. Celle-ci doit permettre de passer du physique à l'abstrait.

Molina et Mason (2009) suggèrent d'amener les élèves (dès la 3^{e} année) à porter leur attention sur les relations plutôt que sur les calculs en proposant des tâches qui leur permettent de reconnaitre facilement des propriétés connues (par exemple la commutativité de l'addition). Ces tâches consistent en des opérations trouées à compléter et des vrai ou faux avec demande de justification. Les grands nombres ainsi que les égalités dans lesquelles il y a des opérations de chaque côté incitent davantage les élèves à avoir recours à des propriétés et à raisonner sur les relations. Toutefois, les auteurs constatent que si l'attention de l'élève est portée sur les nombres, les opérations et les calculs, il n'est pas en mesure de reconnaitre les relations. Ils recommandent donc d'instaurer une culture de classe dans laquelle le raisonnement sur les relations et les justifications à l'aide de propriétés sont favorisées et valorisées. Les tâches de vrai ou faux avec justification sur demande semblent alors tout à fait appropriées.

VIII. Références

Voire la bibliographie complète dans l'annexe II.